

# RECHERCHES
## PLUS EXACTES SUR L'EFFET DES MOULINS À VENT.

PAR M. EULER.

I.

Lorsque je traitai cette matiere, il y a quelques années, j'ai fondé mes calculs ſur l'hypotheſe commune, que l'effet d'un fluide, qui heurte contre une ſurface, eſt en raiſon composée du quarré de la viteſſe, & du quarré du ſinus de l'angle d'incidence : non que je croyois, que cette hypotheſe étoit entierement conforme à la vérité, mais plutôt, puisque la veritable loi de ces forces eſt encore inconnue. Je conviens même que, dans la détermination de la force du vent, cette hypotheſe peut s'ecarter très conſidérablement de la verité, à cauſe de la grande force de la preſſion de l'atmoſphère, qui peut être fort dérangée par l'impulſion du vent, tandis que la même hypotheſe, lorsqu'il s'agit de déterminer l'impulſion de l'eau, ſe trouve plus d'accord avec les expériences; quoique les aberrations y deviennent auſſi ſouvent aſſés remarquables. Donc, ſi j'ai employé cette hypotheſe defectueuſe dans mes recherches ſur l'effet des moulins à vent, c'eſt uniquement à elle qu'il faudra attribuer les erreurs, que la comparaiſon du calcul avec les expériences nous donnera à connoitre.

II. Or il eſt certain, qu'un corps en repos, qui reçoit l'impulſion d'un fluide, en eſt également frappé, que ſi ce même corps ſe mouvoit dans le fluide avec la même viteſſe : & partant ce qu'on nomme impulſion dans le premier cas, ne differe point de ce qu'on nomme réſiſtance dans l'autre. C'eſt donc une complette connoiſſance de la réſiſtance, qui nous manque encore dans ces ſortes de recherches ; & avant qu'on parvienne à cette connoiſſance, on ne ſauroit eſpérer, que la théorie ſur les effets des machines, qui ſont agitées par l'impulſion de quelque fluide, ſoit parfaitement d'accord avec l'expérience. Il y a longtems qu'on a remarqué, que l'hypotheſe commune de la réſiſtance ſatisfait fort peu à quantité d'expériences, qu'on a faires ſur la réſistance des fluides : cependant on n'en a pu decouvrir jusqu'ici la veritable théorie, qui ſemble même demander des recherches trop profondes, pour que nous puiſſions eſpérer d'y arriver ſi tôt. On ne doit donc pas être ſurpris, ſi dans le calcul on s'arrête encore à cette hypotheſe, qu'on n'ignore pas être inſuffiſante.

III. Pour peu qu'on examine auſſi les fondemens, ſur lesquels cette hypotheſe eſt établie, on les trouve d'abord très foibles & entierement chimériques. On s'eſt repréſenté la réſiſtance comme l'effet d'un choc, qu'un corps éprouve à chaque inſtant, en traverſant un fluide : & afin que chaque partie du fluide, qui a déjà eſſuyé le choc, ne trouble pas le ſuivant, on s'imagine, comme ſi elle étoit ſubitement anéantie, & que le corps rencontre à chaque inſtant une nouvelle couche du fluide en repos, contre laquelle il choque avec ſa viteſſe entiere. Or on voit d'abord que toute cette repréſentation eſt chimérique, & que lorsqu'un corps ſe meut dans un fluide, celui-ci en eſt d'abord mis dans un certain mouvement, par lequel le corps pouſſe le fluide devant lui, qui découle enſuite autour du corps pour remplir l'eſpace, qu'il laiſſe vuide derriere lui. Dans cet état le fluide exerce tout autour du corps une certaine preſſion ſur lui, & la réſiſtance n'eſt autre choſe, que l'excés de la preſſion du fluide ſur la partie antérieure, ſur celle que la poſtérieure ſoutient ; d'où il eſt evident que la reſis-

réſiſtance eſt fort mal repréſentée par une continuelle répétition d'un choc, que le corps exerce ſur les parties du fluide.

IV. Cependant il faut convenir que, quelque contraires que ſoient ces fondemens de l'hypotheſe commune à la vérité, il y a pourtant des cas, où elle ne s'écarte pas beaucoup de la vérité, & où l'on s'en peut ſervir ſans tomber dans des erreurs trop énormes. Cela arrive à peu près, lorsque la preſſion naturelle du fluide ſur le corps eſt fort petite, comme ſi la queſtion roule ſur la réſiſtance qu'un corps, qui nage ſur l'eau, ou qui n'y eſt pas profondement ſubmergé, éprouve. Mais, quand un corps eſt jetté dans l'air, la diverſe preſſion de l'atmosphere peut cauſer de ſi grands deſordres, que la réſiſtance devienne très différente de celle que l'hypotheſe commune indique. On n'a qu'à concevoir le cas, où le corps ſe meut plus vite, que l'air ne ſauroit occuper ſubitement les lieux, que le corps vient de quitter, de ſorte qu'il ſe trouve toujours derriere le corps un eſpace vuide d'air, & on verra qu'outre la réſiſtance ordinaire il s'oppoſe au mouvement du corps toute la preſſion de l'atmosphere ; qui agiſſant ſur la partie antérieure du corps, & n'étant pas contrebalancée par une ſemblable preſſion ſur la partie poſtérieure, doit très conſidérablement augmenter la réſiſtance.

V. Auſſi voit-on par les Expériences que Mr. *Robins* a faites ſur le mouvement des boulets à canon, que la réſiſtance eſt de beaucoup plus grande, qu'elle devroit être ſelon l'hypotheſe commune. Car, quand même leur viteſſe n'eſt pas ſi grande, qu'ils laiſſent après eux un eſpace vuide, l'air y doit toujours être moins denſe que devant le corps ; & alors, pour avoir la réſiſtance entiere, il y faut encore ajouter l'excès de la preſſion d'avant ſur celle de derriere. Il eſt auſſi clair que, plus le mouvement du corps eſt lent, plus petit auſſi doit être cet excés: & il y a apparence que cet excés croit dans une raiſon moindre que celle des quarrés de la viteſſe, puisqu'il devient enfin conſtant. D'où il s'enſuit que la réſiſtance totale eſt compoſée de deux parties, dont l'une eſt proportionelle au quarré de la viteſſe,

mais

mais l'autre à une fonction des vitesses, qui croit moins que leur quarré. Par conséquent la véritable résistance des corps mûs dans l'air, sera non seulement plus grande que l'hypothese commune l'indique, mais encore, en augmentant la vitesse, elle croitra suivant une raison moindre que celle des quarrés de la vitesse.

VI. Or, si la résistance qu'un corps jetté dans l'air éprouve, est plus grande que selon l'hypothese commune, il s'ensuit nécessairement, qu'un corps exposé à l'impulsion du vent, en est poussé par une plus grande force que si on l'estimoit conformément à la même hypothese. Ou bien il souffrira, outre la force qu'on attribue communément au choc, encore l'excés de la pression de l'atmosphere que la partie exposée au vent soutient sur celle de derriere. Car si un corps, comme une voile, est opposé à la force du vent, on conçoit aisément, que derriere ce corps la densité, & partant aussi la pression de l'air, ne sauroit être si grande, que si l'air étoit en repos; & cela par la même raison, qu'un corps lancé dans l'air avec une fort grande vitesse laisse après lui un espace vuide. On pourroit s'assurer de cet effet en plaçant derriere la voile pendant un grand vent un barometre, qui montreroit infailliblement une moindre hauteur, que s'il étoit assés eloigné de la voile. Plusieurs expériences de cette espece fourniront aussi le plus sur moyen de nous donner à connoitre cet effet: puisque la théorie est encore trop peu developée pour nous conduire à cette connoissance.

VII. Lorsque je déterminai dans le VIII. Volume de ces Mémoires la quantité d'eau, qu'un moulin à vent est capable d'elever à une hauteur donnée, je n'ai eu égard qu'à la partie de la force, qu'on attribue à l'impulsion, ayant fondé mes calculs uniquement sur l'hypothese ordinaire. Mais, dans un Mémoire inséré au IX. Volume sur le mouvement des bombes, j'ai observé que la résistance actuelle est environ trois fois plus grande, que si on la déterminoit par l'hypothese commune. Donc, puisqu'il est à présumer, que la force actuelle du vent reçoit une pareille augmentation à peu près, il n'y a aucun doute

que

que l'effet des moulins à vent ne surpasse très considérablement celui que je leur avois assigné, & qu'il ne puisse devenir jusqu'à trois fois plus grand : lorsqu'on observe tous les avantages, dont ces machines sont susceptibles. Cependant, puisque la théorie nous manque, je n'oserois prononcer rien de précis là dessus : & il n'y a d'autres moyens pour nous éclaircir sur cet article que les expériences, lesquelles étant faites avec toutes les précautions possibles, & sous des circonstances assez différentes, pourroient bien suppléer au defaut de la théorie.

VIII. Mr. *Lulofs*, très célébre Professeur de l'Université de Leyde, & Membre de notre Académie, vient de me communiquer des expériences faites sur des moulins à vent, dont on se sert en Hollande pour mettre à sec les lieux marécageux. Il me marque qu'un tel moulin, lorsque le vent parcourt environ 30 pieds par seconde, est capable d'élever 1500 pieds cubiques d'eau par minute à la hauteur de 4 pieds, la rouë étant garnie de 4 ailes, dont chacune avoit 43 pieds de longueur sur $5\frac{1}{2}$ de largeur. Ces ailes n'étoient pas partout également inclinées à la direction du vent, qui donnoit presque perpendiculairement sur les extrémités. Or prenant un milieu, il estime l'angle d'incidence moyen du vent sur les ailes de 73°. Il ne me marque pas le tems d'une révolution de la roüe; mais, si ce tems avoit été de $3\frac{3}{4}$ secondes, qui produiroit selon ma théorie le plus grand effet, cette machine n'auroit dû élever que 757 pieds cubiques d'eau dans une minute. Donc, puisqu'elle a actuellement élevé 1500 pieds cubiques, ce qui est presque le double, il s'ensuit que l'impulsion du vent est plus que deux fois plus grande, que je ne l'avois estimée par l'hypothese commune; vû que je n'ai pas tenu compte du frottement, & que la vitesse de la roüe n'etoit peut être pas telle, que le plus grand avantage exigeoit.

IX. Mr. *Lulofs* remarque outre cela, que l'effet de ces moulins à vent ne suit pas la raison des cubes de la vitesse absolue du vent, comme la théorie fondée sur l'hypothese commune montre ; mais que la raison de l'effet, ou de la quantité d'eau élevée dans un tems donné,

 ne

ne ſurpaſſe guéres celle des quarrés de la viteſſe du vent. De là on pourroit conclure, ce qui étoit déjà très probable, que la force de l'impulſion du vent croit ſuivant une moindre raiſon que celle des quarrés de la viteſſe. Cependant, pour mieux juger de la raiſon, que l'effet de ces machines tient à la viteſſe du vent, il faut principalement avoir égard au frottement de ces machines : article que j'ai négligé dans mes recherches ſur cette matiere, & qui augmente encore davantage la force de l'impulſion du vent, ſur celle qui convient à l'hypotheſe commune. Car, ſi une telle machine, nonobſtant le frottement, produit un effet deux fois plus grand, que la théorie indique : il faut bien que l'impulſion ſoit encore plus que deux fois plus grande, que celle de la théorie, où le frottement eſt négligé.

X. Après ces obſervations, je me propoſe de traiter de nouveau cette matiere ſur l'effet des moulins à vent, en ayant égard à cette augmentation de la force du vent, que l'expérience nous fait remarquer. Car, quoique la loy de cette augmentation ſoit inconnue, je l'introduirai en ſorte dans le calcul, qu'elle demeure indéterminée, afin qu'en comparant enſuite le calcul avec pluſieurs expériences, on en puiſſe trouver la quantité ; ce qui ſemble le plus ſûr moyen pour parvenir à une théorie de ces ſortes de machines, tandis que les veritables loix de l'impulſion du vent nous ſont cachées. Enſuite j'aurai auſſi égard au frottement, qui conſtitue dans ces machines un article très eſſentiel, puisqu'il entre dans l'arrangement le plus avantageux, auquel répond le plus grand effet. Car j'ai fait voir, que ſans conſidérer le frottement, l'effet des moulins à vent n'auroit point de bornes, & qu'il ſeroit toujours ſusceptible de nouvelles augmentations en approchant davantage d'un angle droit l'angle d'incidence du vent ſur les ailes, pourvu qu'on augmentât conformément au calcul la viteſſe des ailes. Mais, puisqu'alors le moment du frottement devient plus grand, on conçoit aiſément, que c'eſt le frottement qui doit mettre des bornes au plus grand effet poſſible.

XI. Je commencerai donc par établir une formule convenable pour exprimer la force de l'impulſion, que le vent exerce ſur une ſurface plane; puisque celle des ailes eſt telle, ou peut être conſidérée comme telle. Soit donc une ſurface plane AB $= aa$, en repos, qui reçoive perpendiculairement ſelon les directions $a$A, $b$B l'impreſſion du vent, dont la viteſſe ſoit duë à la hauteur $= c$; & puisqu'on peut conſidérer la force, dont le vent agit ſur le plan, comme compoſée de deux parties, dont la premiere eſt celle qu'on attribuë communément au choc, & l'autre qui réſulte de la raréfaction de l'air derriere le plan: la premiere ſera la même qu'on trouve par l'hypotheſe commune. Elle ſera donc égale au poids d'une maſſe d'air, dont le volume eſt $= aac$: ou bien, ſi nous voulons exprimer les forces par des volumes d'eau dont les poids leur ſont égaux, en poſant la gravité ſpecifique de l'air $m$ fois plus petite que celle de l'eau, cette force ſera $= \frac{1}{m} aac$, dont la direction eſt perpendiculaire au plan; ce qui eſt une régle générale pour toutes les preſſions. Fig. 1.

XII. L'autre partie de l'impulſion du vent réſulte de ce que la preſſion de l'atmosphère eſt diminuée derriere le plan. Pour mieux comprendre cette diminution, nous n'avons qu'à concevoir, que l'air étant en repos, le plan AB s'y meuve avec une pareille viteſſe, ſelon les directions A$a$ & B$b$: & alors il eſt clair, que l'air ne ſauroit parfaitement remplir les eſpaces derriere le plan: le mouvement de l'air chaſſé par avant, ſeroit bien détourné derriere le plan à peu près ſelon les directions A$\alpha$ & B$\beta$, d'où il ſe répandroit à cauſe de ſon reſſort par l'eſpace A$\alpha$B$\beta$; mais il eſt évident que ſa denſité y ſera moindre, & cela d'autant plus, plus le mouvement eſt rapide. On conviendra auſſi, que cette raréfaction ne ſauroit être la même partout derriere le plan; elle ſera ſans doute plus grande vers le milieu C que vers les bords A & B, autour desquels l'air ſe répand plus promtement. Mais ſi derriere le plan AB par toute l'étendue l'air eſt en repos, il ſe remet-

tra d'abord au même degré de denſité & d'elaſticité ; qui ſera par conſéquent moindre qu'avant le plan, ou à des diſtances, qui en ſont aſſez éloignées.

XIII. Suppoſons donc que la preſſion naturelle de l'atmoſphère ſoit égale au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur $= k$; mais que derriere le plan AB, la preſſion de l'air ſoit équivalente à celle d'une colonne d'eau, dont la hauteur ſoit $= q$, & il eſt certain qu'il y aura $q < k$. Or pour déterminer au juſte valeur de $q$, c'eſt en quoi la théorie nous abandonne, de ſorte que nous ſommes obligés de nous en tenir à quelques eſtimations, dans lesquelles il conviendra d'introduire quelque quantité indéterminée, par la détermination de laquelle on puiſſe enſuite mettre d'accord le calcul avec les expériences. Pour cet effet je remarque, que cette hauteur $q$ doit être d'autant plus petite, plus la viteſſe du vent, ou la hauteur $c$ qui lui eſt duë, ſera grande ; d'où je conclus que $q$ eſt exprimée par une certaine fonction de $c$, dont nous connoiſſons ces deux qualités : 1°. qu'au cas de $c = 0$, où le vent ceſſe entierement, il ſoit $q = k$: & 2°. qu'au cas de $c = \infty$, la hauteur $q$ ſoit réduite à zero, puiſqu'il ſe trouvera alors un vuide parfait derriere le plan.

XIV. Ayant donc ces deux conditions à remplir, que

I. poſant $c = 0$ il ſoit $q = k$
II. poſant $c = \infty$ il ſoit $q = 0$

il ſera aiſé d'imaginer une infinité de formules qui ſatisfaſſent. Les plus ſimples ſeront :

$$q = \frac{\alpha k}{\alpha + k}, \quad q = \frac{k}{1 + \alpha c + \beta cc}; \quad q = k e^{-c:b}$$

dont la premiere ne renferme qu'une indéterminée $\alpha$, la ſeconde deux $\alpha$ & $\beta$, de même que la troiſième, où $e$ pourroit marquer un nombre quelconque, poſitif & plus grand que l'unité, pendant que $b$ marqueroit une ligne quelconque poſitive. Or de laquelle de ces formules, qu'on

qu'on veuïlle faire usage, on peut se promettre un assez bon succès, pourvu qu'on fixe la valeur des indéterminées par des expériences bien constatées.

XV. Or, quelque valeur qu'on choisisse pour la hauteur $q$, la pression de l'atmosphère sur la face postérieure du plan AB étant $= aaq$, pendant que la pression sur la face antérieure est $= aak$, la seconde partie de l'impulsion du vent sera $= aa\,(k - q)$: d'où l'on tire la force entiere de l'impulsion $= \frac{1}{m}\,aac + aa\,(k - q)$ $= aa\,(\frac{c}{m} + k - q)$. On pourroit ici objecter, que la pression de l'atmosphère sur la face antérieure devroit être augmentée par la même raison, que celle de la face postérieure a été diminuée; je conviens aisément de cette augmentation, mais je dis qu'elle est déjà précisément comprise dans le terme $\frac{c}{m}$. Car, puisqu'il ne se fait point de choc proprement ainsi dit, tout l'effet du vent consiste uniquement dans la différence des pressions sur les deux faces du plan: & partant $k + \frac{c}{m}$ répond à la pression entiere du vent sur la face antérieure.

XVI. Puisque la colonne d'eau, qui mesure la pression de l'atmosphère sur la face antérieure, est $= k\left(1 + \frac{c}{mk}\right)$; au lieu de cette formule on pourroit bien se servir de celle-ci $k\,e^{\frac{c}{mk}}$ en prenant pour $e$ le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Car tant que $c$ est beaucoup plus petit que $mk$, la valeur de $e^{\frac{c}{mk}}$ ne diffé-

 re

re pas ſenſiblement de $1 + \frac{c}{mk}$ : car, comme $k = 32$ pieds à peu près, & $m = 700$, la hauteur $mk$ devient $= 22400$ pieds, à laquelle répond une viteſſe, qui feroit 1182 pieds par ſeconde: d'où il n'y a aucun doute que la viteſſe du vent ne ſe trouve toujours fort au deſſous de ce nombre. Maintenant, ſi $k e^{\frac{c}{mk}}$ exprime la preſſion en avant, la reſſemblance nous fait conjecturer, que celle de derriere pourroit bien être exprimée par cette formule $k e^{\frac{-c}{mk}}$, qui ſatisfait auſſi aux deux propriétés réquiſes. De là nous aurions pour toute la force de l'impulſion du vent $aak \left(e^{\frac{c}{mk}} - e^{\frac{-c}{mk}}\right)$ qui ne s'écartera peut-être pas ſenſiblement de la vérité. Cependant je ne veux rien décider là deſſus, puisque les vrais principes, d'où il faudroit puiſer ces éclairciſſemens, nous ſont encore trop inconnus.

XVII. Cette augmentation de la force du vent eſt donc uniquement cauſée par la moindre preſſion de l'atmoſphère derriere le plan. Or on voit que ce n'eſt qu' immédiatement prés du plan, que la preſſion eſt ſi petite : à quelque diſtance de là, comme en $\alpha$, $\beta$ la preſſion ne différera plus de la naturelle. Donc, ſi l'on attachoit au plan AB un corps A$\alpha\beta$B, convergent en arriere, à peu près comme la pouppe d'un vaiſſeau, il y éprouveroit partout l'entiere preſſion de l'atmoſphère; & partant la force du vent ſur la face antérieure AB en feroit conſidérablement diminuée, & à peu près conforme à l'hypotheſe commune. De là nous pouvons tirer une remarque fort importante touchant la figure de la pouppe d'un vaiſſeau, pour diminuer la réſiſtance. Car il eſt clair, que ſi la prouë étoit terminée en arriere par un plan, la force de l'eau ſur la face d'avant, ou la réſiſtance, feroit pareille-

reillement augmentée par la diminution de la pression de l'eau en arriere. D'où l'on voit, qu'une pouppe bien allongée & façonnée est fort propre à diminuer la résistance d'un vaisseau ; de sorte qu'elle ne dépend point uniquement de la figure de la prouë, comme on s'imagine ordinairement. De plus, puisque la hauteur $k$ entre dans cette détermination, il s'ensuit, que plus un vaisseau a de profondeur, & plus la figure de la pouppe peut concourir à la diminution de la résistance.

XVIII. Ayant établi des formules propres à marquer la force du vent, lorsqu'un plan en est frappé perpendiculairement, il reste à voir, combien cette force sera diminuée, quand le vent vient frapper obliquement le même plan. Soit comme auparavant la surface du plan $AB = aa$, & $c$ la hauteur duë à la vitesse du vent, le plan étant supposé en repos ; or que $\Phi$ soit l'angle, que fait la direction du vent avec la surface. Cela posé, on soutient que la premiere partie de l'impulsion est diminuée en raison du quarré du sinus de l'angle $\Phi$ : donc cette force sera $= \frac{1}{m} aac \sin \Phi^2$, prenant l'unité pour marquer le sinus total. Pour la diminution de la pression en arriere, on voit aussi qu'elle sera diminuée par l'obliquité : car, si l'angle $\Phi$ évanouïssoit entierement, la densité de l'air ne souffriroit aucune diminution derrière le plan, & partant la seconde partie de la force d'impulsion deviendra aussi d'autant plus petite, plus l'angle $\Phi$ sera petit. Cependant il est incertain, si cette diminution suit la raison du quarré du sinus de l'angle $\Phi$, ou quelqu'autre fonction. Fig. 2.

XVIIII. Donc l'autre partie de l'impulsion du vent, qui étoit pour l'impulsion perpendiculaire $= aa(k-q)$, deviendra aussi d'autant plus petite, plus l'angle d'incidence $\Phi$ s'écarte d'un droit, & puisqu'il faut multiplier la premiere partie par $\sin \Phi^2$, il semble fort probable que l'autre partie doit être diminuée selon la même raison. De là nous aurons pour la force du vent, qui frappe obliquement, cette formule $aa\left(\frac{c}{m} + k - q\right) \sin \Phi^2$, où il faut donner à $q$ une valeur

con-

convenable décrite cy-dessus. Donc, si nous prenons selon la premiere formule $q = \frac{b\,k}{b+c}$, la force du vent sera $= a\,a\left(\frac{c}{m} + \frac{c\,k}{b+c}\right)$ sin $\phi^2$, or posant selon la troisième formule $q = k\,e^{\frac{-c}{b}}$, nous aurons pour la force du vent $a\,a\left(\frac{c}{m} + k - k\,e^{\frac{-c}{b}}\right)$: laquelle ne différe pas sensiblement de la premiere, lorsque $c$ est beaucoup plus petite que $b$. Or $b$ est ici une quantité indéterminée, qu'il conviendra laisser telle, pour pouvoir accorder la théorie avec quelques expériences: dans cette vuë j'employerai la formule $a\,a\left(\frac{c}{m} + \frac{c\,k}{b+c}\right)$ sin $\phi^2$, ou $a\,a\,c\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c}\right)$ sin $\phi^2$, comme la plus simple.

XX. Mais, puisque le vent ne rencontre pas les ailes du moulin en repos, il faut voir, combien le mouvement des ailes change la
Fig. 3. force du vent, ce qui se pourra faire sans le secours de la théorie, qui étoit insuffisante pour les recherches précédentes. Soit donc VC la direction du vent, qui représente en même tems sa vitesse $= \sqrt{c}$; & que le plan AB $= a\,a$ se meuve d'un mouvement parallele selon la direction CU, qui en représente aussi la vitesse $= \sqrt{u}$: or je supose que le plan AB soit perpendiculaire au plan représenté par les deux directions CV & CU, puisque cela arrive dans les moulins à vent. Qu'on conçoive imprimé à tout l'espace un mouvement contraire & egal à celui du plan AB, afin que ce plan soit réduit en repos, & ce mouvement imaginaire se fera selon la direction C$u$, avec la vitesse C$u$ = CU $= \sqrt{u}$. Par là le mouvement du vent selon C$v$ sera réduit au mouvement représenté par la diagonale C$s$ du parallelogramme formé des deux côtés C$v$ $= \sqrt{c}$, & C$u$ $= \sqrt{u}$.

XXI. Qu'on prenne $CS = Cs$ dans la même direction, & la droite $SC$ donnera la direction & la vitesse du vent, qui produiroit sur le plan $AB$ en repos le même effet, que le vent proposé produit sur le plan $AB$ mû, comme je viens de le supposer. Pour trouver cette force, posons l'angle $VCU = vCu$ que fait la direction du vent $VC$ avec celle du plan $CU = \alpha$, & l'angle $Cvs$ étant $= 180 - \alpha$, & les côtés $Cv = \sqrt{c}$ & $vs = Cu = \sqrt{u}$, nous aurons la diagonale

$$Cs = \sqrt{(c + u + 2 \cos\alpha . \sqrt{cu})}$$

qui exprime la vitesse du vent $SC$, & sa direction, dont il faut concevoir, qu'il frappe le plan $AB$ en repos. L'angle d'incidence sera donc $= BCS$, & pour trouver son sinus, soit l'angle $BCV = \omega$, pour avoir $BCS = \omega - VCS$, &

$$\sin BCS = \sin\omega \cos VCS - \cos\omega \sin VCS.$$

Mais $$\cos VCS = \cos vCs = \frac{2c + 2\cos\alpha . \sqrt{cu}}{2\sqrt{c(c+u+2\cos\alpha . \sqrt{cu})}}$$

$$\sin VCS = \sin vCs = \frac{\sin\alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2\cos\alpha . \sqrt{cu})}}$$

d'où il s'ensuit :

$$\sin BCS = \frac{\sin\omega(\sqrt{c} + \cos\alpha . \sqrt{u}) - \cos\omega \sin\alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2\cos\alpha . \sqrt{cu})}}$$

XXII. Donc, si le vent, qui souffle dans la direction $VC$ avec la vitesse $= \sqrt{c}$, frappe sous l'angle $BCV = \omega$ le plan $AB = aa$, qui se meut lui-même avec la vitesse $= \sqrt{u}$ selon la direction $CU$, qui fait avec celle du vent un angle $VCU = \alpha$, l'effet du vent sur ce plan mû sera le même, que si le plan étoit en repos, & que le vent vint frapper là dessus avec une vitesse $= \sqrt{(c + u + 2\cos\alpha . \sqrt{cu})}$, & sous une telle obliquité dont le sinus fut :

$$\frac{\sin\omega(\sqrt{c} + \cos\alpha . \sqrt{u}) - \cos\omega \sin\alpha . \sqrt{u}}{\sqrt{(c + u + 2\cos\alpha . \sqrt{cu})}}$$



d'où

d'où l'on pourra eſtimer la force par la régle donnée cy-deſſus. Ayant ainſi réduit le cas à celui, où le plan ſeroit en repos, il eſt évident que la réſiſtance, que le plan rencontre de l'autre côté, y eſt déjà compriſe, & qu'il ſeroit hors de ſaiſon, d'en vouloir encore tenir compte dans le calcul. Mais il faut bien remarquer, que le plan AB eſt ſuppoſé ici perpendiculaire au plan detérminé par les deux directions VC & CU: & ſi le plan AB y étoit incliné, il en faudroit tenir compte, ce qui rendroit la derniere formule plus compliquée; mais nous n'avons point beſoin de ce cas dans nos recherches ſur les moulins à vent.

XXIII. Après avoir établi ces principes, conſidérons l'aile d'un
Fig. 4. moulin à vent OGGHH, étendue autour du rayon OEF, que nous ſuppoſons perpendiculaire à l'axe du moulin, autour duquel cette aile tourne. Qu'on conçoive cette aile partagée en des parallelogrammes infiniment petits M $mm$ M par des droites MM, $mm$ perpendiculaires au rayon OF; & poſant la diſtance OP $=x$, ſoit la largeur de l'aile MM $=y$, & partant l'aire M$mm$M $=y\,dx$. Comme l'aile tourne autour de l'axe O, ſoit à l'extrémité F la viteſſe $=\sqrt{v}$, ou bien $v$ la hauteur duë à cette viteſſe; & la diſtance OF $=f$. De là nous aurons la viteſſe dont le point P tourne autour de l'axe O, $=\frac{x\sqrt{v}}{f}$. Puisque l'axe du moulin doit toujours être tourné vers le vent, la direction du vent ſera partout parallele à cet axe: poſons donc que la direction du vent faſſe avec le plan du parallelogramme M$mm$M un angle $=\omega$, que je regarderai comme variable par raport à la diſtance OP $=x$, de même que la largeur de l'aile MM $=y$. Cependant cette variabilité de l'angle $\omega$ n'empêchera pas, qu'on ne puiſſe regarder la ſurface entiere de l'aile comme l'intégrale $\int y\,dx$.

XXIV. Qu'on conçoive un plan parallele à l'axe du moulin,
Fig. 5. qui paſſe par la ſection MM, & que la planche (fig. 5) repréſente ce plan, ſur lequel la droite VP marque la direction du vent, dont la viteſſe $=\sqrt{c}$, qui faſſe avec MM l'angle VPM $=\omega$. Or le plan

plan MM aura un mouvement ſelon la direction PU perpendiculaire à VP, avec la viteſſe $= \frac{x\sqrt{v}}{f}$; de ſorte que ce qui a été nommé ci-deſſus $\sqrt{u}$, eſt maintenant $= \frac{x\sqrt{v}}{f}$, & l'angle $\alpha$ ſera ici droit, enfin pour $aa$ il faudra mettre ici $ydx$. Donc le vent produira ſur cet élément de l'aile MM $= ydx$ le même effet, que ſi cet élément étoit en repos, & que la viteſſe du vent fût $= \sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}$ à cauſe de $\alpha = 90°$ & $u = \frac{xxv}{ff}$, & qu'il y tombât ſous un angle, dont le ſinus feroit

$$\frac{\sin \omega . \sqrt{c} - \frac{x\sqrt{v}}{f} \cos \omega}{\sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}}$$

On doit donc mettre cette derniere valeur à la place de ſin $\phi$, & l'autre à la place de $\sqrt{c}$.

XXV. Or nous avons trouvé ci-deſſus (19) cette formule pour exprimer la force du vent, $aac\left(\frac{1}{m} + \frac{k}{b+c}\right) \sin \phi^2$; où nous devons mêttre les valeurs ſuivantes

$ydx$ au lieu de $aa$

$c + \frac{xxv}{ff}$ au lieu de $c$

$\left(\sin \omega . \sqrt{c} - \cos \omega . \frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2$ au lieu de $c \sin \phi^2$

& partant la force du vent ſur l'elément M$mm$M de l'aile ſera égale au poids d'une maſſe d'eau, dont le volume eſt

$$y\,dx\left(\sin\omega.\sqrt{c}-\cos\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ffk}{(b+c)ff+xxv}\right)$$

Mais la direction de cette force étant perpendiculaire au plan selon PN, il la faut décomposer selon la direction P$v$ parallele là l'axe, & la direction du mouvement P U: or l'angle N P U étant égal à l'angle MPV $=\omega$, la force qui agit selon la direction du mouvement P U sera

$$y\,dx\cos\omega\left(\sin\omega.\sqrt{c}-\cos\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ffk}{(b+c)ff+xxv}\right)$$

XXVI. Si nous multiplions cette force par la vitesse de l'élément M$mm$M, qui est $=\frac{x\sqrt{v}}{f}$, nous aurons l'élément du moment d'impulsion qui repond à l'élément de l'aile M$mm$M, & partant le moment d'impulsion sur l'aile entiere sera

$$\int\frac{xy\,dx\sqrt{v}}{f}\cos\omega\left(\sin\omega.\sqrt{c}-\cos\omega.\frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{ffk}{(b+c)ff+xxv}\right).$$

Dans cette intégration la quantité $y$ & l'angle $\omega$ doivent être regardés comme des fonctions de $x$, pendant que les autres quantités $f$, $v$, $k$, $b$, $c$, & $m$ sont constantes; & après avoir trouvé l'intégrale, il faut l'etendre par toute la surface de l'aile. Ensuite il faut la multiplier par 4, puisque les moulins sont ordinairement garnis de quatre ailes, & alors on obtiendra l'entier moment d'impulsion, que le vent exerce sur les ailes, & auquel le moment d'effet, que la machine est capable de produire, sera égal. Or, pour faciliter cette intégration, on pourra regarder le terme $\frac{ffk}{(b+c)ff+xxv}$ comme constant, attendu que dans le dénominateur la partie $xxv$ est extrémement petite par rapport à la partie $(b+c)\,ff$: car l'indéterminée $b$ est apparemment fort grande.

XXVII. Posons donc le dernier facteur de notre formule, puisque nous le pouvons regarder comme constant,

$$= \frac{1}{m} + \frac{ff\ k}{(b+c)ff + xxv} = \frac{n}{m}$$

de ſorte qu'au lieu de l'indéterminée $b$ nous ayons à déterminer le nombre $n$, d'où enſuite il ſera aiſé de connoitre la conſtante $b$, ayant à peu près $\frac{b+c}{k} = \frac{m}{n-1}$ ou $b = \frac{mk}{n-1} - c$. Cela poſé, ſi le moulin eſt garni de 4 ailes ſemblables, le moment entier d'impulſion du vent ſera

$$\frac{4n\sqrt{v}}{mf} \int xydx \operatorname{cof}\omega \left(\operatorname{ſin}\omega . \sqrt{c} - \operatorname{cof}\omega . \frac{x\sqrt{v}}{f}\right)^2$$

ou bien

$$\frac{4nc\sqrt{v}}{mf} \int xydx \operatorname{cof}\omega \left(\operatorname{ſin}\omega - \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}} \operatorname{cof}\omega\right)^2$$

auquel le moment d'effet de la machine eſt égal, pourvu qu'on y tienne compte du frottement. Conſidérons d'abord la figure des ailes comme connue, de même que ſon inclinaiſon à la direction du vent, & voyons quel effet la machine ſera capable de produire; enſuite nous chercherons les arrangemens les plus avantageux pour obtenir le plus grand effet, ce qui ſera le ſujet des problèmes ſuivans.

## PROBLEME I.

XXVIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent; ſi l'on connoit tant la viteſſe du vent, que celle dont les ailes tournent, trouver le moment d'impulſion.*

### SOLUTION.

Soit la largeur conſtante de chaque aile $GG = MM = HH = h$, Fig. 4.
de ſorte que $y = h$; & la longueur $OF = f$; que $v$ marque la hauteur duë à la viteſſe, dont l'extrémité F tourne autour de l'axe O, & $c$ celle qui eſt duë à la viteſſe du vent, dont la direction faſſe un angle

 conſtant

conſtant $= \omega$ avec les faces des ailes. Donc, puisque l'angle $\omega$ eſt conſtant, notre expreſſion pour le moment d'impulſion

$$\frac{4nch\,\mathrm{cof}\,\omega.\sqrt{v}}{mf}\int xdx\left(\mathrm{fin}\,\omega - \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}\,\mathrm{cof}\,\omega\right)^2$$

s'intégrera aiſément : car l'intégrale étant

$$\frac{4nch\,\mathrm{cof}\,\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}xx\,\mathrm{fin}\,\omega^2 - \frac{2x^3\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\,\mathrm{fin}\,\omega\,\mathrm{cof}\,\omega + \frac{x^4 v}{4ffc}\,\mathrm{cof}\,\omega^2\right)$$

Si nous poſons $x=f$, le moment d'impulſion ſur toutes les quatre ailes ſera exprimé en ſorte :

$$\frac{4ncfh\,\mathrm{cof}\,\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{fin}\,\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\,\mathrm{fin}\,\omega\,\mathrm{cof}\,\omega + \frac{v}{4c}\,\mathrm{cof}\,\omega^2\right).$$

COROLL. I.

XXIX. C'eſt donc à cette quantité que ſera égal le moment d'effet de la machine, ou bien le produit de la réſiſtance par la viteſſe dont elle ſera vaincue, pourvû qu'on y comprenne auſſi le frottement. Car c'eſt une regle générale pour toutes les machines que le moment d'impulſion eſt égal au moment d'effet.

COROLL. 2.

XXX. Cette égalité étant fondée ſur l'état d'équilibre ſuppoſe l'uniformité dans l'action de la machine. Or au premier inſtant, où la machine eſt encore en repos, il faut bien que l'impulſion ſoit plus forte que la réſiſtance, pour mettre la machine en mouvement, mais enſuite le mouvement devient de plus en plus uniforme, & ce n'eſt qu'alors, que les deux momens mentionnés deviennent égaux.

COROLL. 3.

XXXI. La formule que je viens de trouver pour le moment d'impulſion dépend principalement de la viteſſe des ailes $\sqrt{v}$, & elle deviendroit même infinie, ſi l'on augmentoit cette viteſſe à l'infini ; puisque

que le dernier facteur $\frac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2$ ne sauroit jamais évanouir, ou devenir négatif.

SCHOLIE.

XXXII. Cependant il est très certain que le moment d'impulsion ne sauroit jamais surpasser de certaines limites, de sorte que l'augmentation de la vitesse $\sqrt{v}$ est nécessairement restrainte à quelque détermination. Il est donc bien important d'examiner cette détermination, que la considération de notre analyse nous découvrira d'abord. Car puisque le vent, qui frappe sur les ailes mises en mouvement, y exerce la même force, que si les ailes étoient en repos, & que le vent y frappât avec une vitesse $= \sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}$ sous un angle dont le sinus seroit

$$= \frac{\sin\omega - \frac{x\sqrt{v}}{f}.\cos\omega}{\sqrt{\left(c + \frac{xxv}{ff}\right)}},$$

il est clair que, si ce sinus devenoit négatif, la force du vent repousseroit les ailes en arriere. Or, puisque le quarré de ce sinus entre dans notre formule, il semble que l'effet devoit être le même, soit que ce sinus soit négatif ou positif; & on se tromperoit énormement si l'on vouloit appliquer notre formule à des cas, où le sinus d'incidence deviendroit négatif: car alors il faudroit absolument regarder l'impulsion comme négative. Donc, pour que notre formule soit conforme à la verité, il faut que l'expression $\sin\omega.\sqrt{c} - \frac{x\sqrt{v}}{f}.\cos\omega$, ne devienne nulle part négative: donc notre théorie suppose absolument, que pour tous les élémens des ailes cette condition ait lieu, qu'il soit $\tang\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$; d'où l'on voit que

la

la vitesse $\sqrt{v}$ ne sauroit être augmentée à volonté. Donc, notre formule trouvée pour le moment d'impulsion ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût pour tous les élémens des ailes tang $\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$: & s'il arrivoit que pour quelque partie des ailes la quantité $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ devint plus grande que tang. $\omega$, il en résulteroit une force contraire au mouvement des ailes, quoique le calcul ne le montrât point. Voilà donc une condition très essentielle, & sans laquelle le moment d'impulsion trouvé ne seroit jamais juste, qui exige que la quantité $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ ne surpasse nulle part tang $\omega$. Et partant dans le cas de notre probleme, où l'angle $\omega$ est constant, la valeur de $\frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ sera toujours moindre que tang $\omega$, pourvû que $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ ne surpasse point tang $\omega$, d'où il est évident que dans le cas présent la formule donnée pour le moment d'impulsion exige nécessairement qu'il soit $\sqrt{v} <$ tang $\omega . \sqrt{c}$ & que sans cette condition elle seroit infailliblement fausse. La vitesse des ailes $\sqrt{v}$ obtient par là un terme qu'elle ne doit jamais passer, & le dernier degré étant $\sqrt{v} =$ tang $\omega . \sqrt{c}$ donne le moment d'impulsion $= \frac{ncfh\sqrt{c}}{3m}$ sin $\omega^3$, qui est encore juste. Mais, si l'on augmentoit la vitesse $\sqrt{v}$ au delà, l'impulsion diminueroit certainement, quoique le calcul la montrât plus grande.

## PROBLEME II.

XXXIII. *Les ailes étant partout de la même largeur & également inclinées à la direction du vent, si l'on connoit la structure de la machine, & la résistance qui doit être vaincue, déterminer l'action de la machine, qui sera produite par un vent donné.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit comme auparavant la largeur des ailes MM $= h$, leur longueur OF $= f$, & l'inclinaiſon de leurs faces à la direction du vent $= \omega$, dont la viteſſe ſoit düe à la hauteur $= c$. Maintenant, de quelque maniere que la machine ſoit conſtruite, on la peut toujours réduire à l'action d'un tambour RSRS, fixé ſur l'axe des ailes OO, autour duquel paſſe une corde TZ, qui éléve un poids P, pendant que les ailes tournent. Soit donc le rayon de ce tambour $= r$, & le poids P égal à celui d'une maſſe d'eau, dont le volume $= p^3$; de ſorte que la lettre $r$ renferme la conſtruction de la machine, & $p^3$ la réſiſtance qu'il faut ſurmonter. Suppoſons que la machine ſoit déjà parvenue à l'uniformité de mouvement, & que les extrémités des ailes F tournent avec la viteſſe $= Vv$, & la viteſſe, dont le poids P monte, Fig. 6

ſera $= \frac{rVv}{f}$: donc le moment d'effet de la machine doit être eſtimé

$= \frac{p^3 rVv}{f}$: lequel étant égal au moment d'impulſion trouvée

ci-deſſus donnera l'équation ſuivante, après avoir diviſé par $Vv$:

$$\frac{4ncfh\cos\omega}{m}\left(\frac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2Vv}{3Vc}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right) = \frac{p^3 r}{f}.$$

Mais, avant que la machine puiſſe parvenir à l'état d'uniformité, il faut que d'abord, lorſque la machine eſt encore en repos, l'impulſion ſoit plus forte que la réſiſtance: il faut donc qu'il ſoit

$\frac{2ncfh}{m}\sin\omega^2\cos\omega > \frac{p^3 r}{f}$, ou $c > \frac{m\,p^3\,r}{2nffh\sin\omega^2\cos\omega}$, & tant que la viteſſe du vent ſeroit moindre, la machine demeureroit en repos. Or, par les raiſons alleguées dans le §. préc: il faut auſſi qu'il ſoit $Vv <$ tang $\omega . Vc$, puiſqu'ailleurs le calcul ſeroit contraire à la vérité. Ayant donc bien remarqué ces deux circonſtances, nous pourrons trouver la viteſſe des ailes $Vv$, qui conviendra au mouvement uniforme:

me : pour rendre cette recherche plus aisée, posons $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \operatorname{tang} \omega$, & notre équation prendra cette forme :

$$\frac{4ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} z + \tfrac{1}{4} zz\right) = \frac{p^3 r}{f}$$

d'où nous tirons

$$zz - \tfrac{8}{3} z + 2 = \frac{m p^3 r}{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega}$$

$$\& \quad z = \tfrac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega} - \tfrac{2}{9}\right)}$$

par conséquent

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \tfrac{4}{3} \operatorname{tang} \omega \pm \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{ncffh \cos \omega^3} - \tfrac{2}{9} \operatorname{tang} \omega^2\right)}.$$

Mais il faut qu'il soit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} < \operatorname{tang} \omega$, d'où il est évident que le signe $+$ devant le radical ne sauroit avoir lieu, & le signe $-$ ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \tfrac{4}{3} \operatorname{tang} \omega - \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{ncffh \cos \omega^3} - \tfrac{2}{9} \operatorname{tang} \omega^2\right)} < \operatorname{tang} \omega$$

$$\text{ou} \quad \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \omega < \sqrt{\left(\frac{m p^3 r}{ncffh \cos \omega^3} - \tfrac{2}{9} \operatorname{tang} \omega^2\right)}$$

& partant prenant les quarrés :

$$\tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \omega^2 < \frac{m p^3 r}{ncffh \cos \omega^3} \quad \text{ou bien}$$

$$c < \frac{3 m p^3 r}{nffh \sin \omega^2 \cos \omega}$$

Or la premiere condition exige, qu'il soit

$$c > \frac{m p^3 r}{2 nffh \sin \omega^2 \cos \omega}.$$

Donc

Donc, à moins que la viteſſe du vent ne ſoit entre ces deux limites, le mouvement uniforme ne ſauroit avoir lieu ; car, ſi elle étoit au deſſous de la moindre limite, la machine ne produiroit aucune action, & ſi elle étoit au deſſus de la plus grande, le mouvement de la machine ſeroit continuellement accéléré, ſans qu'il parvint jamais à l'état d'uniformité. Or, tant que la viteſſe du vent ſubſiſte entre ces deux limites, la formule irrationelle trouvée ſera toujours réelle, & on pourra aſſigner la viteſſe, dont les ailes tourneront dans l'état d'uniformité : d'où l'on connoitra auſſi la viteſſe du fardeau, & partant le moment d'effet de la machine.

### COROLL. I.

XXXIV. Il eſt d'abord clair que le vent doit avoir quelque force, avant qu'il ſoit en état de mettre la machine en mouvement. Si nous poſons pour abréger $\frac{p^3\ r}{ffh\sin\omega^2\cos\omega} = u$, la hauteur düe à la viteſſe du vent $c$ doit être plus grande que $\frac{mu}{2n}$, & tant que le vent eſt plus foible, la machine demeure ſans action.

### COROLL. 2.

XXXV. Cette quantité $u$ dépend donc 1°. de la longueur $f$, de la largeur $h$, & de l'inclinaiſon des ailes, ou de l'angle $\omega$, ſuppoſé que tant la largeur que l'inclinaiſon ſoit par tout la même : 2°. de la ſtructure de la machine, qui eſt renfermée dans la quantité $r$ : & 3°. de la grandeur du fardeau, qu'il faut élever $p^3$, ou en général de la réſiſtance qu'il faut vaincre.

### COROLL. 3.

XXXVI. Donc, pour que le vent ſoit capable de mettre la machine en action, il faut qu'il ſoit $c > \frac{mu}{2n}$ : & alors ayant $z =$

$\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{mu}{nc} - \frac{2}{9}\right)}$, la viteſſe des ailes à leur extrémité ſera $\sqrt{v} = z \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$; ou bien

$$\sqrt{v} = \text{tang } \omega \left(\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{mu}{nc} - \frac{2}{9}\right)}\right) \sqrt{c}$$

De là on connoitra la viteſſe $\frac{r\sqrt{v}}{f}$, dont le fardeau ſera élevé.

COROLL 4.

XXXVII. Il eſt auſſi évident, que plus la viteſſe du vent augmente, plus auſſi la quantité $z$, & partant à plus forte raiſon la viteſſe des ailes $\sqrt{v}$, deviendra grande. Cependant notre formule n'a lieu, que tandis que la hauteur duë à la viteſſe du vent $c$ eſt moindre que $\frac{3mu}{n}$; lorsqu'elle devient plus grande, la valeur de $\sqrt{v}$ ne ſera plus conforme à notre formule.

COROLL 5.

XXXVIII. Or, ſi $c = \frac{3mu}{n}$, qui contient la plus grande force du vent, à laquelle notre formule puiſſe être appliquée, nous aurons $z = \frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)} = 1$. & partant on aura pour la viteſſe des ailes $\sqrt{v} = \text{tang } \omega . \sqrt{c} = \text{tang } \omega . \sqrt{\frac{3mu}{n}}$: & pour la viteſſe du fardeau $\frac{r\sqrt{v}}{f} = \frac{r \text{ tang } \omega}{f} \sqrt{\frac{3mu}{n}}$.

SCHOLIE.

XXXIX. Quand le vent augmente au delà de ce degré, notre formule ne ſauroit plus avoir lieu; car, puisque alors le mouvement des ailes devient plus rapide, ou $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} > \text{tang } \omega$, l'effet du vent ſur

les

les extrémités des ailes sera négatif, ou les ailes y seront frappées du côté opposé, ce qui diminuera la force d'impulsion, au lieu que notre calcul change cette diminution en augmentation. La force de l'impulsion étant donc dans ces cas plus petite, que notre calcul l'indique, l'effet de la machine en sera aussi diminué. Et partant un vent plus fort, en faisant tourner plus vite les ailes, produira bien un plus grand effet, mais cet effet sera de beaucoup moindre, que selon le calcul; ce qui est sans doute le cas que Mr. *Lulofs* a en vuë, quand il dit avoir observé que les effets des vent plus rapides ne croissent pas dans la raison du cube de leur vitesses, & pas même dans celle de leurs quarrés. Cela n'est donc pas contraire à ce que j'avois avancé, que l'effet du vent croissoit dans la raison du cube de sa vitesse; car je parlois alors des plus grands effets, que chaque vent est capable de produire; or cet avantage exige pour chaque vitesse du vent un arrangement particulier dans la disposition de la machine. Mais, lorsque l'arrangement demeure le même, il est également vray, que l'effet des vents les plus forts suive une raison beaucoup plus petite que celle des cubes de leur vitesse, quoiqu'il fût possible en changeant la disposition de la machine, ou la quantité $r$, d'en tirer un effet, qui seroit à peu près proportionnel au cube de la vitesse. Dans le problême présent j'ai supposé l'arrangement de la machine, ou la quantité $r$, la même pour tous les degrés du vent; & il est clair que cet arrangement ne sauroit être le plus avantageux que pour un seul degré de vitesse; & par la raison alléguée il est clair, que lorsque $c > \frac{3mu}{n}$, on perd principalement beaucoup sur l'effet que la machine seroit capable de produire, si l'on y changeoit convenablement la quantité $r$, d'où depend celle de $u$.

## PROBLEME III.

XL. *Si dans le cas du problème précédent la vitesse du vent est si grande, que notre calcul n'y sauroit plus être appliqué, déterminer l'action de la machine, qu'un tel vent sera capable de produire.*

SOLUTION.

Dans ce cas toute la difficulté revient à ce que les ailes tournent si vite, qu'une partie vers leurs extremités est frappée en derriere par le vent, dont l'effet par conséquent est contraire au mouvement de la machine. Soit donc la vitesse des ailes à leur extrémité F $= \sqrt{v}$, & que la partie TTHH reçoive le choc du vent par la face de derriere, tandis que la partie GGTT le reçoit par avant : posons la distance OS $= s$, & le moment d'impulsion pour la partie GGTT sera

Fig. 4.

$$\frac{4nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right).$$

Or la partie TTHH fournira, pour ainsi dire, un moment de répulsion, qui sera

$$+\frac{4ncfh\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right)$$

$$-\frac{4nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega.\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right).$$

Retranchant celui-ci de celui-là, il restera le moment de l'impulsion actuelle, qui sera :

$$+\frac{8nchss\cos\omega.\sqrt{v}}{mf}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2s\sqrt{v}}{3f\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{ssv}{4ffc}\cos\omega^2\right)$$

$$-\frac{4ncfh\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right)$$

Or, puisque en TT est la séparation des impulsions positives & négatives, il y aura $\sin\omega\ \sqrt{c} - \frac{s\sqrt{v}}{f}\cos\omega = 0$, ou $s = f\operatorname{tang}\omega.\sqrt{\frac{c}{v}}$, & cette valeur étant substituée à la place de $s$, on aura le vray moment d'impulsion des cas en question

$$\frac{ncfh\sin\omega^2\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\frac{2c\sin\omega^2}{3v\cos\omega^2} - 2 + \frac{8\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}.\frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{v\cos\omega^2}{c\sin\omega^2}\right)$$

&

& cette formule aura lieu toutes les fois que $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} > \text{tang}\ \omega$. C'eſt donc à cette formule qu'il faut égaler le moment d'effet $\frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$, lorsqu'il y aura $c > \frac{3mp^3 r}{nffh \text{ſin}\,\omega^2 \text{coſ}\,\omega^2}$. Poſons comme auparavant pour abréger $\frac{p^3 r}{ffh\, \text{ſin}\,\omega^2 \text{coſ}\,\omega} = u$, de ſorte que nous ayons à conſidérer les cas où $c > \frac{3mu}{n}$ & l'équation d'où il faut tirer la viteſſe des ailes $\sqrt{v}$ ſera

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2c\, \text{ſin}\,\omega^2}{3v\, \text{coſ}\,\omega^2} - 2 + \frac{8\sqrt{v}}{3\sqrt{c}} \cdot \frac{\text{coſ}\,\omega}{\text{ſin}\,\omega} - \frac{v\, \text{coſ}\,\omega^2}{c\, \text{ſin}\,\omega^2}$$

Soit encore $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\text{coſ}\,\omega}{\text{ſin}\,\omega} = z$ ou $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z\ \text{tang}\ \omega$, pour avoir

$$\frac{mu}{nc} = \frac{2}{3zz} - 2 + \tfrac{8}{3}z - zz$$

d'où l'on voit qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ ou $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3}$, il y aura $z = 1$. Soit donc $c > \frac{3mu}{n}$, & partant $\frac{mu}{nc} < \frac{1}{3}$; & voyon quelle ſera la valeur de $z$. Poſons pour cet effet $\frac{mu}{nc} = \frac{1}{3} - \nu$, & $z = 1 + \xi$, en regardant $\nu$ & $\xi$ comme des fractions fort petites, de ſorte que $\frac{1}{zz} = 1 - 2\xi$ & $zz = 1 + 2\xi$, & nous aurons:

$$\tfrac{1}{3} - \nu = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}\xi - 2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{8}{3}\xi - 1 - \xi = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\xi$$

donc $\xi = \frac{3}{2}\nu$ ou $z = \frac{3}{2} - \frac{3mu}{2nc}$ Par conſéquent, lorsque la viteſſe du vent ſurpaſſe tant ſoit peu la limite marquée, ou qu'il y

$c =$ a

$c = \frac{3mu}{(1-3\nu)n}$, marquant par $\nu$ une fraction extrèmement petite, nous aurons $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega} = 1 + \frac{3}{2}\nu = \frac{3}{2} - \frac{3mu}{2nc}$, donc

$$\sqrt{v} = \tfrac{3}{2} \operatorname{tang} \omega \left(\sqrt{c} - \frac{mu}{n\sqrt{c}}\right) \text{ à peu près.}$$

Ou bien si $c = \frac{3mu}{(1-3\nu)n} = \frac{3mu}{n}(1+3\nu)$, nous aurons

$$\sqrt{v} = \operatorname{tang} \omega \, (1 + 3\nu) \sqrt{\frac{3mu}{n}}.$$

COROLL. 1.

XLI. Donc, si la viteſſe du vent ſurpaſſe infiniment peu la limite trouvée $c = \frac{3mu}{n}$, de ſorte que $c = \frac{3mu}{n}(1+3\nu)$, la viteſſe des ailes à leur extrémité ſera

$$\sqrt{v} = \frac{c \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{\frac{3mu}{n}}}$$

COROLL. 2.

XLII. Or on trouve le même rapport, si la viteſſe du vent eſt tant ſoit peu plus petite que ladite limite, de ſorte que près de cette limite la viteſſe des ailes, & partant auſſi celle du fardeau, ou l'effet de la machine, eſt proportionelle au quarré de la viteſſe du vent.

COROLL. 3.

XLIII. Mais, si la viteſſe du vent ſurpaſſe conſidérablement cette limite, l'effet ne croitra plus dans la même raiſon. Poſons $c = \frac{6mu}{n}$, ou que la viteſſe du vent ſoit à celle de la limite comme $\sqrt{2}$ à 1, ou le

le quarré deux fois plus grand, & on aura à résoudre l'équation, $\frac{1}{6} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - zz$ ou celle cy

$$z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{13}{6}zz - \frac{2}{3} = 0$$

d'où l'on tire à peu près $z = \frac{4}{3}$ & $\sqrt{v} = \frac{4}{3}$ tang $\omega \sqrt{\frac{6mu}{n}}$

COROLL. 4.

XLIV. Or dans le cas $c = \frac{3mu}{n}$, on a $\sqrt{v} =$ tang $\omega . \sqrt{\frac{3mu}{n}}$: donc, lorsque le quarré de la viteſſe du vent devient deux fois plus grand, la viteſſe des ailes, ou l'effet, ſera augmenté dans le rapport de 1 à $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ou de 1 à $\sqrt{\frac{32}{9}}$; & cette augmentation eſt moindre que ſi elle ſuivoit la raiſon du quarré des viteſſes du vent.

COROLL. 5.

XLV. Poſons la viteſſe du vent deux fois plus grande que dans la limite, ou ſoit $c = \frac{12mu}{n}$, & l'équation à réſoudre ſera

$\frac{1}{12} = \frac{2}{3zz} - 2 + \frac{8}{3}z - zz$, ou $z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{25}{12}zz - \frac{2}{3} = 0$, d'où l'on trouve à peu près $z = \frac{16}{11}$, & partant $\sqrt{v} = \frac{16}{11}$ tang $\omega \sqrt{\frac{12mu}{n}}$. Donc l'effet ſera $\frac{32}{11}$ ou 3 fois plus grand, qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$ quoique le quarré de la viteſſe ſoit 4 fois plus grand.

COROLL. 6.

XLVI. De la même maniere on trouvera, que quand même la viteſſe du vent deviendroit 100 fois plus grande qu'au cas $c = \frac{3mu}{n}$, l'effet ne feroit que $\frac{11}{7}$. 100 ou 157 fois plus grand ; de ſorte qu'enfin les effets ne ſuivront que la raiſon ſimple de la viteſſe du vent.

SCHOLION.

XLVII. Si l'on donne l'exclusion à ces cas où $c > \frac{3mu}{n}$, la machine décrite ne peut servir que lorsque la vitesse du vent est renfermée entre ces deux limites, $c = \frac{mu}{2n}$ & $c = \frac{3mu}{n}$, de sorte que la vitesse du plus fort ne surpasse celle du plus foible que dans la raison de $\sqrt{6}$ à 1. Or, quand le vent se trouve entre ces deux limites, il est aisé de déterminer la vitesse des ailes $\sqrt{v}$, & partant aussi celle que le vent imprimera à la machine. Il sera donc bon de calculer les cas principaux, afin qu'on les puisse mieux comparer avec ceux que je viens de déveloper ici, quand $c > \frac{3mu}{n}$.

| | |
|---|---|
| $c = \frac{mu}{2n}$ | $\sqrt{v} = 0$ |
| $c = \frac{mu}{n}$ | $\sqrt{v} = 0{,}44141 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{3mu}{2n}$ | $\sqrt{v} = 0{,}66666 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{2mu}{n}$ | $\sqrt{v} = 0{,}80628 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{5mu}{2u}$ | $\sqrt{v} = 0{,}91170 \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{3mu}{n}$ | $\sqrt{v} = \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{6mu}{n}$ | $\sqrt{v} = \frac{4}{3} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{12mu}{n}$ | $\sqrt{v} = \frac{16}{11} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |
| $c = \frac{30000mu}{n}$ | $\sqrt{v} = \frac{11}{7} \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$ |

Com-

Comparons ensemble les cas $c = \frac{3mu}{2n}$ & $c = \frac{3mu}{n}$, où la raison des quarrés des vitesses du vent est 1 : 2, & celle des effets $\frac{4}{3} : \sqrt{2}$, qui est un peu plus grande que celle-là ; & nous verrons, que l'observation de Mr. *Lulofs* est assez bien d'accord avec ce calcul : par lequel nous voyons aussi, que la disposition de la Machine demeurant la même, les effets sont à peu près dans la raison du quarré de la vitesse du vent, pourvu qu'on on excepte les cas, où le vent est, ou très foible, ou extrémement fort. Or, ce nonobstant, je soutiens qu'il est possible d'augmenter l'effet en raison du cube de la vitesse du vent : mais alors il faut changer la disposition de la machine, représentée par la quantité $r$, & pour chaque vitesse du vent on pourra déterminer une valeur de $r$, qui produise le plus grand effet : quoique je suppose, que les ailes demeurent les mêmes, & qu'on ait le même fardeau $p^3$ à élever, ou en général la même résistance à vaincre. Ce sera le sujet du problême suivant.

## PROBLEME IV.

XLVIII. *La largeur des ailes, & leur inclinaison à la direction du vent étant par tout les mêmes & données, de même que la résistance, qui doit être vaincuë, trouver la disposition de la machine, pour que le plus grand effet soit produit, pour chaque vitesse du vent, en faisant abstraction du frottement.*

### SOLUTION.

Les choses données sont donc la longueur de chaque aile OF $= f$, Fig. 4. la largeur HH $= h$, l'inclinaison à la direction du vent $= \omega$ : ensuite la résistance à vaincre, représentée par le poids d'un volume d'eau $= p^3$, & enfin la vitesse du vent, qui soit duë à la hauteur $= c$. Or nous cherchons la disposition de la machine, qui, quelque composée qu'elle soit, se réduit au rapport entre les vitesses du fardeau & de la force, qui étant supposé comme $r$ à $f$, tout revient à la détermination

 de

de la quantité $r$, que nous avons représentée par le rayon du tambour RRSS (fig. 5) Or cette quantité $r$ dépend de la vitesse $\sqrt{v}$, dont les ailes tournent à leurs extrémités ; & puisque le moment d'effet est égal au moment d'impulsion, nous n'avons qu'à chercher la vitesse $\sqrt{v}$, pour que le moment d'impulsion devienne le plus grand. Or le moment d'impulsion étant trouvé

$$\frac{4ncfh \operatorname{cof} \omega . \sqrt{v}}{m} \left( \tfrac{1}{2} \sin \omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}} \sin\omega \operatorname{cof}\omega + \frac{v}{4c} \operatorname{cof}\omega^2 \right)$$

posons pour abréger $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z$ tang $\omega$, & l'expression suivante

$$\frac{4ncfhz \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{m} \left( \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{1}{4}zz \right)$$

doit être reduite à un *maximum*, par la détermination de la variable $z$. Nous aurons donc à égaler à un *Maximum* cette formule $2z - \frac{8}{3}zz + z^3$. d'où nous tirons

$$2 - \tfrac{16}{3}z + 3zz = 0 \text{ \& partant}$$

$$z = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} . \operatorname{cotang} \omega = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{9}$$

Mais, pour que notre expression du moment d'impulsion ait lieu, il faut que $\sqrt{v} <$ tang $\omega . \sqrt{c}$ ou $z < 1$, d'où l'on voit que l'ambiguité des signes se réduit au signe $-$, de sorte que nous ayons

$$\sqrt{v} = \frac{8 - \sqrt{10}}{9} \operatorname{tang} \omega . \sqrt{c}$$

Et substituant cette valeur, le moment d'impulsion sera

$$\frac{ncfh \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m} . \frac{8 - \sqrt{10}}{9} . \frac{44 + 8\sqrt{10}}{81}$$

ou $$\frac{ncfh \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{m} . \frac{272 + 20\sqrt{10}}{729}$$

Posons

Posons pour abréger ces facteurs irrationnels

$$\frac{8 - \sqrt{10}}{9} = \lambda = 0,537514$$

$$\frac{44 + 8\sqrt{10}}{81} = \mu = 0,855544$$

$$\frac{272 + 20\sqrt{10}}{729} = \nu = 0,459873$$

de sorte que $\nu = \lambda \ \mu$, & la vitesse des ailes sera

$$\sqrt{v} = \lambda \text{ tang } \omega . \sqrt{c}$$

& le moment d'impulsion, qui est le plus grand

$$\frac{\nu ncfh \text{ sin } \omega^3 \sqrt{c}}{m}$$

auquel doit être égal le moment d'effet $\frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$, d'où nous tirons

$$\frac{\lambda \ p^3 r \text{ tang } \omega . \sqrt{c}}{f} = \frac{\nu ncfh \text{ sin } \omega^3 . \sqrt{c}}{m}$$

ou $p^3 r = \frac{\mu ncffh \text{ sin } \omega^2 . \text{ cos } \omega}{m}$,

donc $r = \frac{\mu ncffh \text{ sin } \omega^2 . \text{ cos } \omega}{mp^3}$,

d'où l'on connoit la disposition de toute la machine.

COROLL. I.

XLIX. Donc, pour qu'une telle machine produise le plus grand effet, il faut que pour chaque vitesse du vent on donne à la quantité $r$ une valeur particuliere : laquelle est proportionnelle au quarré de la vitesse du vent.

COROLL 2.

L. La diſpoſition de la machine doit donc être telle, que le rapport entre les viteſſes du fardeau & de la rouë principale, ou le rapport entre $f$ & $r$, puiſſe être changé : ou bien que le rayon du tambour $r$ puiſſe être augmenté & diminué dans la raiſon doublée de la viteſſe du vent.

COROLL 3.

LI. Donc, ſi le tambour a une grandeur fixe, comme nous l'avons ſuppoſé dans les propoſitions précédentes, il n'y a qu'un ſeul degré du vent, où la machine produiſe le plus grand effet, ce qui arrive lorsque $c = \frac{mp^3 r}{\mu nffh \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega}$. Tous les autres vents produiront un moindre effet, qu'ils ne ſeroient capables de produire, l'on pouvoit changer la diſpoſition de la machine, ou la quantité $r$.

COROLL 4.

LII. Or, ſi l'on donne à $r$ pour chaque vent ſa valeur convenable $r = \frac{\mu ncffh \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega}{mp^3}$, la machine produira le plus grand effet, dont le moment ſera $= \frac{vncfh \text{ ſin } \omega^3 \sqrt{c}}{m}$. Cet effet eſt donc proportionnel au cube de la viteſſe du vent ; pendant qu'il en ſuit à peine la raiſon du quarré, ſi la valeur de $r$ demeure fixe.

COROLL 5.

LIII. On voit auſſi que ce plus grand effet eſt proportionnel à la ſurface des ailes, ou à $fh$, & outre cela auſſi au cube du ſinus de l'angle d'incidence du vent $\omega$. D'où il eſt evident, qu'il eſt fort avantageux d'approcher ce angle $\omega$ autant d'un droit, qu'il eſt poſſible.

SCHOLION. I.

LIV. $\sqrt{c}$ entre dans nos formules, entant qu'il exprime la viteſſe du vent, & il ſera aiſé d'introduire à ſa place l'eſpace que le vent parcourt dans une ſeconde. Que $g$ marque la hauteur, par laquelle un

un corps tombe dans une ſeconde, & $2\sqrt{gc}$ ſera l'eſpace, que le vent parcourt dans une ſeconde: poſant maintenant $2\sqrt{gc}$ à la place de $\sqrt{c}$, l'expreſſion $\frac{2vncfh \sin \omega^3 . \sqrt{gc}}{m}$ donnera l'effet de la machine produit dans une ſeconde, ou bien la réſiſtance multipliée par l'eſpace, par lequel elle avance dans une ſeconde. Et ſi la machine eſt employée à élever de l'eau, cette même expreſſion définit la quantité d'eau élevée par ſeconde, multipliée par la hauteur, à laquelle l'eau eſt élevée. Soit donc $a$ la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée, & M la maſſe d'eau élevée dans une ſeconde, qu'il faut exprimer en pieds cubiques, ſi les quantités $c$, $f$, $h$, & $g$, ſont données en pieds, & on aura $Ma = \frac{2vncfh \sin \omega^3 \sqrt{gc}}{m}$, d'où l'on aura la quantité d'eau M, qui ſera élevée par ſeconde à la hauteur donnée $a$.

$$M = \frac{2vncfh \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{ma.}$$

Pour en donner un exemple, ſuppoſons ſelon le cas propoſé par Mr. *Lulofs*

$f = 43$ pieds, $h = 5\frac{1}{2}$ pieds, $a = 4$ pieds, & l'angle $\omega = 73^\circ$ enſuite $2\sqrt{gc} = 30$ pieds: donc à cauſe de $g = 15\frac{5}{8}$ pieds, il y aura $c = \frac{72}{5}$ pieds, d'où nous obtiendrons,

$\sin \omega^3 = \frac{7}{8}$ & $M = \frac{30.\ 72.\ 43.\ 11.\ 7}{4.\ 5.\ \ \ \ \ 2.\ 8}.\ \frac{vn}{m}$ pieds cubiques,

ou $M = \frac{89497}{4}.\ \frac{vn}{m} = 10289.\ \frac{n}{m}$ pieds cubiques.

Prenons $m = 700$, & nous aurons $M = 14\frac{7}{10}\ n$. Donc dans une minute cette machine élevera $882\,n$ pieds cubiques d'eau à la hauteur de 4 pieds. Donc, ſi cette machine élevoit 1500 pieds cubiques, il faudroit mettre $n = \frac{1500}{882}$: d'où il eſt evident que la valeur de $n$ eſt encore plus grande, puisque d'un côté j'ai négligé ici le frottement, & d'un autre côté il n'eſt pas probable, que la diſpoſition de la machine

chine ait été conforme au plus grand avantage. J'ai supposé ici la gravité specifique de l'air 700 fois plus petite que celle de l'eau, au lieu que dans mes premiers calculs je l'avois prise 850 fois moindre, & c'est la raison que j'ai trouvé ici le nombre 882 au lieu de 757, que j'ai rapporté cy dessus (§. 8). Cependant je ne voudrois encore rien décider sur la véritable valeur de la lettre $n$, puisque le cas de l'expérience n'est pas assez d'accord avec celui, auquel j'ai appliqué ici le calcul. Car Mr. *Lulofs* a marqué exprès, que l'inclinaison des ailes au vent n'étoit pas par toute leur longueur la même; mais que l'angle $\omega$ étoit moindre près de l'axe, & plus grand vers les extrémités, que $73°$, & qu'il avoit pris un milieu. Or il est encore fort douteux, si un tel milieu est équivalent; je différerai donc la décision, jusqu'à ce que j'aurai examiné le cas, où l'angle $\omega$ est variable par la longueur des ailes.

LV. Il est ici fort remarquable que l'effet de ces machines est proportionnel au cube du sinus de l'angle d'inclinaison $\omega$, d'où il s'ensuit que, pour produire le plus grand effet, il faudroit rendre cet angle droit. Cependant il est très certain qu'alors le vent n'exerceroit plus aucune force sur les ailes; & qu'il ne seroit pas capable de vaincre la moindre résistance: aussi trouvons-nous pour ce cas $r = 0$ à cause de $\cos \omega = 0$, de sorte que le moment de la résistance évanouïroit tout à fait, & la vitesse des ailes $V v$ deviendroit infinie. Par cette raison on voit bien que ce cas est impossible, puisque les ailes rencontrent toujours par leur tranchant une résistance de la part de l'air, laquelle croissant dans la raison des quarrés de la vitesse arrêteroit bientôt l'accélération ulterieure des ailes, quand même la résistance de la machine évanouïroit. Mais, quoiqu'il fut $r = 0$, où la force de la résistance seroit réduite à rien, le moindre frottement de la machine rendroit ce cas inutile, & l'arrêteroit en repos. De là il est évident qu'on ne sauroit négliger, ni le frottement, ni la résistance de l'air, que les ailes souffrent par leur tranchant, dès que l'angle $\omega$ approche fort d'un droit, & que la vitesse des ailes devient fort rapide: puisqu'alors ces deux

deux circonſtances fourniſſent les principales déterminations de la machine & de ſon mouvement. Il eſt donc de la derniere importance, qu'en traitant ce problème on ait égard tant au frottement qu'à la réſistance de l'air, & ce ſera de là qu'on pourra déterminer, jusqu'à quel point on puiſſe augmenter l'angle $\omega$, afin que le véritable effet devienne le plus grand. Or le ſeul frottement mettra déjà de telles bornes à la viteſſe des ailes, qu'on pourra ſe diſpenſer d'avoir égard à la réſiſtance de l'air, tant puisqu'elle n'eſt pas fort conſidérable, quand le mouvement des ailes n'eſt pas extrémement rapide, que puisque ſon effet peut être réuni à peu près avec celui du frottement. Car, quoique celui-cy ſuive la raiſon ſimple de la viteſſe, & celui-là la doublée, on pourra bien ſe paſſer de la petite différence qui en réſulteroit.

## PROBLEME V.

LVI. *Les mêmes choſes étant données que dans le problême précedent, trouver la diſpoſition de la machine, afin qu'elle produiſe le plus grand effet, en ayant égard au frottement, auquel la machine eſt asſujettie.*

### SOLUTION.

Pour vaincre le frottement ſoit requiſe la force F, qui étant appliquée à l'extrémité d'une aile, contrebalance préciſément le frottement. Cette force étant contraire à la force d'impulſion, ſon moment, qui eſt $F\sqrt{v}$, doit être retranché du moment d'impulſion, de ſorte que, pour mettre la machine en action, on aura ce moment d'impulſion

$$\frac{4ncfh\cos\omega.\sqrt{v}}{m}\left(\tfrac{1}{2}\sin\omega^2 - \frac{2\sqrt{v}}{3\sqrt{c}}\sin\omega\cos\omega + \frac{v}{4c}\cos\omega^2\right) - F\sqrt{v}$$

qu'il faut rendre un *maximum*. Poſons comme auparavant pour abréger $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z\ \text{tang}\ \omega$, & nous aurons :

$$\frac{ncfhz\sin\omega^3\sqrt{c}}{m}\left(2 - \tfrac{8}{3}z + zz\right) - Fz\ \text{tang}\ \omega.\sqrt{c}$$



Soit

Soit de plus $\frac{m\,F\,\text{tang}\,\omega}{n c f h \,\text{fin}\,\omega^3} = \Phi$, & il faudra rendre un *maximum*

$$2z - \tfrac{8}{3}zz + z^3 - \Phi z, \quad \text{d'où nous tirons}$$

$$3zz - \tfrac{16}{3}z + 2 - \Phi = 0 \quad \text{\& partant :}$$

$$z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}$$

C'eſt donc le nombre $\Phi$, qui renferme l'effet du frottement, ayant ſuppoſé $\Phi = \frac{m\,F}{n c f h\,\text{fin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega}$, & de là nous aurons pour la viteſſe des ailes :

$$\sqrt{v} = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}\,\text{tang}\,\omega.\sqrt{c}$$

Enſuite, puiſque $F = \frac{n c f h\,\text{fin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega}{m}\Phi$, le plus grand moment d'impulſion ſera :

$$\frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}\cdot\frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81}\cdot\frac{n c f h\,\text{fin}\,\omega^3.\sqrt{c}}{m}.$$

ou $\frac{272 - 648\Phi + (20 + 54\Phi)\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{729}\cdot\frac{n c f h\,\text{fin}\,\omega^3.\sqrt{c}}{m}$

auquel doit être égal le moment de l'effet $\frac{p^3 r \sqrt{v}}{f}$, d'où l'on tire

$$\frac{p^3 r}{f} = \frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81}\cdot\frac{n c f h\,\text{fin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega}{m}, \text{ \& partant}$$

$$r = \frac{44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}}{81}\cdot\frac{n c f f h\,\text{fin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega}{m p^3}$$

COROLL.

COROLL. 1.

LVII. Donc, après avoir posé $\phi = \frac{m F}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}$, nous venons de trouver $z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27 \phi)}}{9}$, & de là nous avons la vitesse des ailes à leurs extrémités $\sqrt{v} = z \tang \omega . \sqrt{c}$, & le moment d'impulsion, ou plûtot celui de l'effet,
$= \frac{ncfhz \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m} (2 - \frac{8}{3} z + zz - \phi)$, puisque nous avons déjà retranché le frottement de l'impulsion actuelle. Enfin, pour la disposition la plus avantageuse, nous aurons
$r = \frac{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega}{m p^3} (2 - \frac{8}{3} z + zz - \phi)$, si l'on donne à $z$ la valeur trouvée.

COROLL. 2.

LVIII. Sans avoir égard à la disposition la plus avantageuse, il faut, que la machine étant encore en repos, ou $z = 0$, la force du vent soit au moins capable de vaincre le frottement ; d'où il faut qu'il soit $\phi < 2$. Ensuite, pour qu'elle puisse aussi vaincre la résistance, il faut qu'il soit $\frac{ncffh \sin \omega^2 \cos \omega}{m} (2 - \phi) < p^3 r$. Enfin, par la raison alléguée cy-dessus, $z$ doit être moindre que l'unité, ou $z < 1$.

COROLL. 3.

LIX. Donc, puisque $\phi = \frac{m F}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega}$, il est absolument nécessaire qu'il soit $\frac{mF}{ncfh \sin \omega^2 \cos \omega} < 2$, & partant $c > \frac{mF}{2nfh \sin \omega^2 \cos \omega}$ d'où l'on connoit quelle force doit avoir le vent, avant qu'il soit capable de vaincre le frottement. Or, pour empêcher que la valeur

de $\phi$ ne devienne trop grande, il eſt évident, que l'angle $\omega$ ne ſauroit être ni trop petit, ni trop approchant d'un droit.

COROLL. 4.

LX. Or, ſi $\phi < 2$; on trouve toujours pour $z$ une valeur poſitive moindre que l'unité, par laquelle on déterminera la plus avantageuſe diſpoſition de la Machine, ou la quantité $r$. Où l'on peut remarquer que la formule trouvée ſe change aiſément dans cette forme.

$$r = \frac{[8-\sqrt{(10+27\phi)}]\,[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]}{81} \cdot \frac{ncffh \sin\omega^2 \cos\omega}{mp^3}.$$

Et le moment de l'effet ſera alors

$$\frac{[8-\sqrt{(10+27\phi)}]^2\,[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]}{729} \cdot \frac{ncfh \sin\omega^3 \sqrt{c}}{m}.$$

COROLL. 5.

LXI. Ce plus grand moment, dès qu'il commence à devenir réel, ou que $\phi < 2$, augmente avec la viteſſe du vent; & lorſque le vent devenoit infiniment rapide, ce moment, ou l'effet de la machine, ſuivroit encore la raiſon du cube de la viteſſe du vent. Or, ſi la viteſſe du vent diminue, la valeur de $\phi$ augmente, & rend le coëfficient irrationel plus petit, d'où l'effet décroitra dans une raiſon plus grande que celle des cubes de la viteſſe.

COROLL. 6.

LXII. Or ce coëfficient irrationel $[8-\sqrt{(10+27\phi)}]^2$ $[8+2\sqrt{(10+27\phi)}]$ évanouit lorſque $\phi = 2$, & pendant que la valeur de $\phi$ décroit, ou que la viteſſe du vent augmente, il deviendra de plus en plus grand, & approchera de $(8-\sqrt{10})^2$ $(8+2\sqrt{10})$, qui eſt ſa valeur pour le cas $\phi = 0$; ou la viteſſe du vent infinie. Donc, puiſque ce coëfficient croit avec la viteſſe du

du vent, il eſt clair que le plus grand effet de la machine croit dans une plus grande raiſon, que celle des cubes de la viteſſe du vent.

SCHOLION.

LXIII. Nous avons conſidéré ici l'inclinaiſon des ailes à la direction du vent, ou l'angle $\omega$ comme donné ; or on voit que le plus grand effet qu'on obtient, ſi l'on donne à la machine la diſpoſition preſcrite, dépend beaucoup de cet angle $\omega$. Car, ſi l'on faiſoit l'angle $\omega$ à peu près de $90^\circ$, ce qui feroit le cas le plus avantageux s'il n'y avoit point de frottement, le facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3 \sqrt{c}}{m}$ deviendroit bien le plus grand, mais le facteur irrationel diminueroit l'effet, à cauſe de la valeur de $\Phi$, qui eſt réciproquement proportionelle à ſin $\omega^2$ coſ $\omega$: & nous avons vû, que ſi $\Phi = 2$ ou même plus grand que 2, la machine ne ſauroit plus être miſe en mouvement. Il faut donc prendre l'angle $\omega$ en ſorte qu'il en réſulte une valeur pour $\Phi$, qui ſoit moindre que 2, & pour cet effet il faut exclure, tant les cas où l'angle $\omega$ eſt trop petit, que ceux où il aproche trop d'un angle droit, puiſque l'un & l'autre cas augmente la valeur de $\Phi$. En ne regardant que l'angle $\omega$ comme variable, la valeur de $\Phi$ devient la plus petite ſi l'on prend ſin $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$ & coſ $\omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$, ou bien l'angle $\omega = 54^\circ, 44'$, auquel cas on aura $\Phi = \frac{3mF\sqrt{3}}{2ncfh}$, qui eſt ſa plus petite valeur. Mais, ſoit qu'on prenne l'angle $\omega$ plus grand ou plus petit que $54^\circ, 44'$, la valeur de $\Phi$ deviendra plus grande, de ſorte qu'il y a toujours deux angles pour $\omega$, qui donnent la même valeur pour $\Phi$, dont l'un eſt plus grand que $54^\circ, 44'$, & l'autre plus petit. Or il eſt évident que de ces deux valeurs il eſt toujours bon de choiſir la plus grande, puiſque alors ſin $\omega^3$, ou le dernier facteur devient plus grand, le premier irrationel demeurant le même : ainſi ces deux angles $\omega = 45^\circ$, & $\omega = 64^\circ, 5', 11''$ donnent la même valeur ſin $\omega^2$ coſ $\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, & partant auſſi la même pour $\Phi$. Cepen-

dant, en prenant $\omega = 64°, 5', 11''$ au lieu de $\omega = 45°$, l'effet de la machine sera $2\frac{1}{17}$ fois plus grand. On comprend auſſi qu'il eſt plus avantageux de prendre l'angle $\omega$ plus grand que $54°, 44'$; car, quoique la valeur de $\Phi$ devienne plus grande, & partant le facteur irrationel $\frac{[8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}]^2\ [8 + 2\sqrt{(10 + 27\Phi)}]}{729}$ plus petit, l'autre facteur $\frac{ncfh \sin \omega^3\ \sqrt{c}}{m}$, prend en échange une plus grande valeur, de ſorte que le produit de ces deux formules devient plus grand : car, ſi l'on augmente tant ſoit peu l'angle $\omega$ au delà de $54°, 44'$, le nombre $\Phi$, & partant auſſi le facteur irrationel, n'en change point, tandis que l'autre facteur en reçoit une augmentation ſenſible. Il eſt donc important de déterminer l'angle $\omega$, ſous lequel il faut incliner les ailes à la direction du vent, afin que la machine produiſe le plus grand effet ; ce que nous ferons dans le problème qui ſuit.

## PROBLEME VI.

LXIV. *Quand les ailes ſont partout également larges, & également inclinées à la direction du vent, trouver quelle inclinaiſon il leur faut donner, afin que la machine produiſe le plus grand effet, en tenant compte du frottement.*

### SOLUTION.

Après avoir poſé comme ci-deſſus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = z \tang \omega$, le moment d'impulſion diminué de celui du frottement eſt

$$\frac{ncfhz \sin \omega^3 . \sqrt{c}}{m} (2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - Fz \tang \omega . \sqrt{c}$$

qu'il s'agit de rendre un *maximum*. Or, puiſqu'on demande l'angle le plus convenable $\omega$, en ſuppoſant qu'on ait déjà donné à $z$ la valeur, que la plus avantageuſe diſpoſition de la machine exige, ſavoir

$z =$

$z = \frac{8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}}{9}$, ayant posé $\Phi = \frac{m F}{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}$,
il faut différentier l'expression du moment en supposant tant $z$ que l'angle $\omega$ variable. Or le différentiel qui résulte de la variabilité de $z$ évanouit déjà, si l'on donne à $z$ la valeur trouvée ; il ne reste donc qu'à considérer l'angle $\omega$ seul comme variable, & posant le différentiel $= 0$ nous aurons cette équation.

$$\frac{3ncfhz \sin\omega^2 \cos\omega \sqrt{c}}{m}(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{Fz\sqrt{c}}{\cos\omega^2} = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{3ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}{m}(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{F}{\cos\omega^2} = 0$$

Posons pour F sa valeur $\frac{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega.}{m}\Phi$ pour avoir

$$3(2 - \tfrac{8}{3}z + zz) - \frac{\Phi}{\cos\omega^2} = 0$$

ou

$$\Phi = 3 \cos\omega^2 (2 - \tfrac{8}{3}z + zz) = \frac{\cos\omega^2 \left[8 - \sqrt{(10 + 27\Phi)}\right]\left[8 + 2\sqrt{(10 + 27\Phi)}\right]}{27}$$

Donc nous aurons

$$\frac{27\Phi}{\cos\omega^2} = 44 - 54\Phi + 8\sqrt{(10 + 27\Phi)}$$

Mais, puisque $\Phi = \frac{mF}{ncfh \sin\omega^2 \cos\omega}$, posons pour abréger $\frac{mF}{ncfh} = \frac{4\alpha}{27}$, de sorte que $27\Phi = \frac{4\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega}$, & nous aurons

$$\frac{\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega^3} = 11 - \frac{2\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega} + 2\sqrt{\left(10 + \frac{4\alpha}{\sin\omega^2 \cos\omega}\right)}$$

ou

$$\alpha + 2\alpha \cos\omega^2 - 11 \sin\omega^2 \cos\omega^3 = 2 \sin\omega \cos\omega^2 \sqrt{(10 \sin\omega^2 \cos\omega^2 + 4\alpha \cos\omega)}$$

qui

qui étant délivrée des irrationels prendra cette forme

$$\alpha\alpha(1+2\cos\omega^2)^2 - 2\alpha\sin\omega^2\cos\omega^3(11+30\cos\omega^2) + 81\sin\omega^4\cos\omega^6 = 0$$

où il faut se souvenir que $\frac{4\alpha}{\sin\omega^2\cos\omega}$ doit être moindre que 54, & partant $\sin\omega^2\cos\omega > \frac{4\alpha}{54}$, ou $\sin\omega^2\cos\omega > \frac{2\alpha}{27}$. Tout revient donc à résoudre cette équation, & à en déterminer l'angle $\omega$. Comme elle peut avoir plusieurs racines, il est bon de remarquer, que l'angle satisfaisant est toujours plus grand que 54°, 44′, comme j'ai fait voir ci-dessus.

COROLL. 1.

LXV. La constante $\alpha = \frac{27\,mF}{4\,ncfh}$ renferme le frottement F, auquel elle est proportionelle. Et au cas que le frottement évanouit, notre équation nous découvre $\cos\omega = 0$, ou l'angle $\omega$ droit, tout comme nous l'avons déjà remarqué.

COROLL. 2.

LXVI. Donc, si le frottement est extrémement petit, nous voyons que l'angle $\omega$ doit approcher fort d'un angle droit, de sorte que $\cos\omega$ sera une fraction très petite. Nous pourrons donc supposer $1+2\cos\omega^2 = 1$ & $11+30\cos\omega^2 = 11$, & notre équation à résoudre sera

$$\alpha\alpha = 22\,\alpha\sin\omega^2\cos\omega^3 - 81\sin\omega^4\cos\omega^6$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = (11 \pm \sqrt{40})\sin\omega^2\cos\omega^3 \text{ ou } \sin\omega^2\cos\omega^3 = \frac{\alpha}{11\pm\sqrt{40}}.$$

Et, puisque $\sin\omega$ est à peu près $= 1$, on aura $\cos\omega = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{11\pm\sqrt{40}}}$

où

où il faudra prendre le signe $+$, afin que l'angle $\omega$ approche plus d'un droit.

COROLL. 3.

LXVII. On pourra aussi déterminer les cas, où un angle donné $\omega$ est le plus propre pour procurer le plus grand effet de la machine. Car, prenant pour $\omega$ un angle quelconque plus grand que 54°, 44′, on trouve

$$\alpha = \frac{11 + 30\cos\omega^2 \pm \sqrt{[(7 + 24\cos\omega^2)^2 - 9]}}{(1 + 2\cos\omega^2)^2} \cdot \sin\omega^2\cos\omega^2$$

& cet angle produira le plus grand effet, lorsque le frottement est $F = \frac{4ncfh\alpha}{27\,m}$. Alors ayant $-z = \frac{8}{9} - \sqrt{\left(\frac{10}{81} + \frac{4\,\alpha}{81\sin\omega^2\cos\omega}\right)}$, le plus grand moment d'effet sera,

$$\frac{ncfhz\sin\omega^3.\sqrt{c}}{m}\left(2 - \tfrac{8}{3}z + zz\right) - Fz\tang\omega\sqrt{c}.$$

EXEMPLE.

LXVIII. *Qu'on cherche les cas, où l'inclinaison des ailes à la direction du vent de 70°, 31′, est la plus avantageuse : ou lorsqu'on met $\cos\omega = \frac{1}{3}$ & $\sin\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.*

Posant donc $\cos\omega = \frac{1}{3}$ & $\sin\omega^2 = \frac{8}{9}$, on trouvera

$$\alpha = \frac{43 \pm \sqrt{760}}{121} \cdot \frac{8}{9}$$ d'où l'on tire deux valeurs, qui sont

$\alpha = 0,5184$ & $\alpha = 0,1134$, auxquelles répond le frottement $F = 0,0768 \cdot \frac{m}{n} cfh$ & $F = 0,0168 \cdot \frac{m}{n} cfh$.

SCHOLIE.

LXIX. Or, puisque l'inclinaiſon des ailes, comme je viens de la déterminer, dépend de la force du vent, & qu'il la faudroit changer toutes les fois que le vent change, la pratique ne ſauroit tirer aucun avantage de cette détermination, qui demanderoit d'ailleurs un dévelopement plus ſoigneux, auquel il ſeroit ſuperflu de s'arrêter plus longtems. Ce qui nous a jetté dans cet embarras, c'eſt que nous avons donné aux ailes par toute leur étendue la même inclinaiſon à la direction du vent: or il n'y a non ſeulement rien qui nous oblige à cette égalité, mais il eſt même beaucoup plus avantageux de donner aux ailes une inclinaiſon variable, en ſorte que l'angle $\omega$ en s'éloignant de l'axe approche de plus en plus de 90°. Auſſi voyons-nous qu'on obſerve actuellement cette maxime dans la pratique; & quand Mr. *Lulofs* marque, que l'angle $\omega$ étoit de 73°, il avertit expreſſément, que le vent tomboit plus obliquement ſur les ailes près de l'axe, & qu'il les frappoit presque perpendiculairement vers les extrémités. Et pour ramener ce cas à celui que j'avois traité, y ayant ſuppoſé l'inclinaiſon uniforme, il avoit pris un milieu entre la plus grande & la plus petite inclinaiſon. Donc, puisqu'il a trouvé ce milieu de 73°, ſi la plus grande a été de 90°, la plus petite ſeroit de 56°. J'examinerai donc combien cette variabilité eſt conforme à la théorie, & combien il y a à gagner de ce côté pour augmenter l'effet de ces ſortes de machines.

## PROBLEME VII.

LXX. *Trouver la plus avantageuſe inclinaiſon, qu'il faut donner aux ailes d'un moulin à vent, afinqu'on en puiſſe tirer le plus grand effet.*

SOLUTION.

Pour réſoudre ce probléme il faut remonter à la premiere formule intégrale, qui exprime le moment d'impulſion. Or, ſi nous poſons la longueur entiere des ailes $OF = f$, leur largeur $MM = y$, qui
Fig. 4. convient à la diſtance de l'axe $OP = x$, & l'angle ſous lequel l'élément

ment de l'aile MM*mm* y eſt incliné à la direction du vent $=\omega$, il faut conſidérer cet angle comme variable, & déterminer pour chaque diſtance de l'axe $OP = x$ ſa valeur, afin que le moment d'impulſion devienne le plus grand. Mais nous avons trouvé (27) ce moment exprimé en ſorte :

$$\frac{4ncVv}{mf}\int xy\,dx\,\text{cof}\,\omega\left(\text{fin}\,\omega-\frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega\right)^2$$

où $c$ marque la hauteur dûe à la viteſſe du vent, & $v$ celle qui eſt dûe à la viteſſe des ailes à leur extrémité F. De quelque maniere que la largeur des ailes varie, on peut regarder $y$ comme une fonction donnée de $x$; & notre formule intégrale ne renfermera que deux variables $x$ & $\omega$, entre leſquelles il faut déterminer le rapport, qui rendra un *maximum* la valeur de notre intégrale. Or on ſait que, ſi Z eſt une fonction quelconque de deux variables $x$ & $\omega$, en ſorte que $dZ = M\,dx + N\,d\omega$, la formule intégrale $\int Z\,dx$ obtiendra la plus grande valeur quand on poſe $N=0$; donc, puiſque dans notre cas on a

$$Z = xy\,\text{cof}\,\omega\,(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega)^2$$

il s'enſuit par la différentiation

$$N = -xy\,\text{fin}\,\omega\,(\text{fin}\,\omega-\frac{xVv}{fVc}\text{cf}\,\omega)^2 + 2xy\,\text{cf}\,\omega\,(\text{fn}\,\omega-\frac{xVv}{fVc}\text{cf}\,\omega)\,(\text{cf}\,\omega+\frac{xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega)$$

d'où, en diviſant par $xy\,(\text{fin}\,\omega - \frac{xVv}{fVc}\,\text{cof}\,\omega)$, nous tirons cette équation :

$$\text{fin}\,\omega^2 - \frac{xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega = 2\,\text{cof}\,\omega^2 + \frac{2xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega$$

ou $\text{fin}\,\omega^2 - 2\,\text{cof}\,\omega^2 = \frac{3xVv}{fVc}\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega.$

 Poſons

Posons pour abréger $\frac{3x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}} = 2\varrho$ pour avoir

$$\sin\omega^2 - 2\cos\omega^2 = 2\varrho \sin\omega \cos\omega,$$ où divisant par $\cos\omega^2$

$$\tan\omega^2 = 2\varrho \tan\omega + 2$$ donc

$$\tan\omega = \varrho + \sqrt{(\varrho\varrho + 2)}$$ ou bien

$$\tan\omega = \frac{3x\sqrt{v}}{2f\sqrt{c}} + \sqrt{\left(\frac{9xxv}{4ffc} + 2\right)}$$

D'où l'on connoit pour chaque distance $x$ de l'axe l'inclinaison qu'il faut donner aux ailes, afin que le moment d'impulsion devienne le plus grand qu'il est possible.

### COROLL. 1.

LXXI. De cette formule il est évident que, plus le point P des ailes est éloigné de l'axe O, & plus l'angle $\omega$ y devient grand, ou plus l'inclinaison des ailes à la direction du vent y approche d'un angle droit. Or tout près de l'axe O, ou $x = 0$, on a $\tan\omega = \sqrt{2}$, ou bien l'angle $\omega = 54°, 44'$; & partant plus loin de l'axe O l'angle $\omega$ doit être plus grand.

### COROLL. 2.

LXXII. A l'extrémité des ailes en F, où $x = f$, l'angle $\omega$ sera le plus grand, & on aura $\tan\omega = \frac{3\sqrt{v}}{2\sqrt{c}} + \sqrt{\left(\frac{9v}{4c} + 2\right)}$. Cet angle dépend donc du rapport des vitesses $\sqrt{v}$ & $\sqrt{c}$; & plus la vitesse des ailes est grande par rapport à la vitesse du vent, plus aussi approchera l'angle $\omega$ d'un droit. S'il y avoit $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, on auroit $\tan\omega = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$, ou bien l'angle $\omega = 74°, 19'$. Or, si l'on met $\sqrt{v} = 2\sqrt{c}$, on aura $\tan\omega = 3 + \sqrt{11}$ ou $\omega = 81°, 1'$; & pour le cas $\sqrt{v} = 3\sqrt{c}$, on aura $\tan\omega = \frac{9 + \sqrt{89}}{2}$ ou $\omega = 83°, 49'$.

CO-

COROLL. 3.

LXXIII. Posons ce raport $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \nu$, & il faut qu'il demeure toujours le même, quelque changement qu'il arrive au vent, afin que les ailes puissent servir pour tous les degrés du vent: alors on aura

$$\text{tang } \omega = \frac{3\nu x}{2f} + \sqrt{\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)}$$

& à l'extrémité des ailes en F, tang $\omega = \frac{3}{2}\nu + \sqrt{(\frac{9}{4}\nu\nu + 2)}$.

COROLL. 4.

LXXIV. Dans cette disposition des ailes il n'est pas à craindre, que le calcul devienne jamais contraire à la vérité. Car, quelque grande que soit la vitesse du vent, il y a toujours sin $\omega > \frac{x\sqrt{v}}{f\sqrt{c}}$ cos $\omega$, & il n'arrive jamais, comme dans les cas précédens, qu'une partie des ailes éprouve le choc du vent par derriere.

COROLL. 5.

LXXV. Posant $\sqrt{v} = \nu\sqrt{c}$, le moment d'impulsion sera

$$\frac{4\nu nc\sqrt{c}}{mf} \int xydx \text{ cos } \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

& puisque la formule intégrale ne renferme plus la vitesse du vent, le moment d'impulsion sera proportionnel au cube de la vitesse du vent.

PROBLEME VIII.

LXXVI. *Si les ailes sont partout de la même largeur, & qu'on dispose leur inclinaison à la direction du vent, comme il a été enseigné dans le problême précédent, déterminer le moment d'impulsion dont les ailes seront frappées par chaque vent.*

SOLUTION.

Ayant établi un certain rapport entre la viteſſe du vent $\sqrt{c}$ & la viteſſe des ailes à leur extrémité $\sqrt{v}$, en ſorte que $\sqrt{v} = \nu\sqrt{c}$, ſoit la largeur conſtante des ailes HH $= h$, & puiſque $y = h$, il s'agit de trouver l'intégrale de cette expreſſion.

$$\frac{4\nu n h c \sqrt{c}}{mf} \int x dx \text{ coſ } \omega^3 \left(\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

en poſant tang $\omega = \frac{3\nu x}{2f} + \sqrt{\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)}$. Or, ſi l'on mettoit cette valeur à la place de tang $\omega$, le coſ $\omega$ ſeroit exprimé par une formule ſi embarraſſée, qu'on auroit bien de la peine à en chercher l'intégrale. Il eſt donc à propos de garder dans le calcul la variable $\omega$, & de déterminer l'autre $x$ par celle-ci : doù l'on aura

$$\text{tang } \omega^2 - \frac{3\nu x}{f} \text{ tang } \omega = 2, \ \& \ \frac{\nu x}{f} = \frac{\text{tang } \omega^2 - 2}{3 \text{ tang } \omega}$$

De là nous obtiendrons :

$$\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f} = \frac{2 \text{ tang } \omega^2 + 2}{3 \text{ tang } \omega} = \frac{2}{3 \text{ ſin } \omega \text{ coſ } \omega}$$

$$\& \quad \left(\text{tang } \omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2 = \frac{4}{9 \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega^2}$$

Enſuite ayant

$$x = \frac{f}{3\nu} (\text{tang } \omega - 2 \text{ coſ } \omega) = \frac{f(\text{ſin } \omega^2 - 2 \text{ coſ } \omega^2)}{3\nu \text{ ſin } \omega \text{ coſ } \omega}$$

a différentiation donne

$$dx = \frac{f d\omega}{3\nu}\left(\frac{1}{\text{coſ } \omega^2} + \frac{2}{\text{ſin } \omega^2}\right) = \frac{f d\omega (\text{ſin } \omega^2 + 2 \text{ coſ } \omega^2)}{3\nu \text{ ſin } \omega^2 \text{ coſ } \omega^2}$$

D'où l'on tirera

$$x dx \text{ coſ } \omega^3 = \frac{ff d\omega (\text{ſin } \omega^4 - 4 \text{ coſ } \omega^4)}{9\nu\nu \text{ ſin } \omega^3}$$

&

& partant le moment d'impulſion ſera

$$\frac{16nfhcVc}{81\ vm}\int\frac{d\omega\ (\text{ſin}\ \omega^4 - 4\ \text{coſ}\ \omega^4)}{\text{ſin}\ \omega^5\ \text{coſ}\ \omega^2}$$

Poſons $\int\frac{d\omega\ (\text{ſin}\ \omega^4 - 4\ \text{coſ}\ \omega^4)}{\text{ſin}\ \omega^5\ \text{coſ}\ \omega^2} = \Omega$, & nous aurons.

$$d\ \Omega = \frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega\ \text{coſ}\ \omega^2} - \frac{4\ \text{coſ}\ \omega^2}{\text{ſin}\ \omega^5}\ d\omega,\ \text{ou bien}$$

$$d\ \Omega = d\ \omega\left(\frac{\text{ſin}\ \omega}{\text{coſ}\ \omega^2} + \frac{1}{\text{ſin}\ \omega} + \frac{4}{\text{ſin}\ \omega^3} - \frac{4}{\text{ſin}\ \omega^5}\right)$$

où l'on remarque d'abord que $\int\frac{d\omega\ \text{ſin}\ \omega}{\text{coſ}\ \omega^2} = \frac{1}{\text{coſ}\omega}$, & $\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega} = l$ tang $\frac{1}{2}\ \omega$ en prenant les logarithmes hyperboliques. Enſuite, ayant en général $\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^\mu} = \frac{\mu-2}{\mu-1}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^{\mu-2}} - \frac{\text{coſ}\ \omega}{(\mu-1)\ \text{ſin}\ \omega^{\mu-1}}$

nous aurons :

$$\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega^3} = \tfrac{1}{2}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{2\ \text{ſin}\ \omega^2} = \tfrac{1}{2}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\omega - \frac{\text{coſ}\,\omega}{2\ \text{ſin}\ \omega^2}$$

$$\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\,\omega^5} = \tfrac{3}{4}\int\frac{d\omega}{\text{ſin}\ \omega^3} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{4\,\text{ſin}\,\omega^4} = \tfrac{3}{8}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega - \frac{3\ \text{coſ}\,\omega}{8\ \text{ſin}\ \omega^2} - \frac{\text{coſ}\,\omega}{4\,\text{ſin}\,\omega^4}$$

Raſſemblons toutes ces parties enſemble, & nous trouverons,

$$\Omega = \frac{1}{\text{coſ}\,\omega} + \tfrac{3}{2}\ l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \omega - \frac{\text{coſ}\,\omega}{2\ \text{ſin}\ \omega^2} + \frac{\text{coſ}\,\omega}{\text{ſin}\ \omega^4}$$

ou $$\Omega = \frac{2\ \text{ſin}\ \omega^4 + \text{ſin}\ \omega^2\ \text{coſ}\,\omega^2 + 2\ \text{coſ}\,\omega^4}{2\ \text{ſin}\ \omega^4\ \text{coſ}\,\omega} + \tfrac{3}{2}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\omega$$

d'où nous tirons le moment d'impulſion :

$$\frac{16nfhcVc}{81vm}\left(\frac{2\text{ſin}\,\omega^4 + \text{ſin}\,\omega^2\ \text{coſ}\omega^2 + 2\text{coſ}\omega^4}{2\ \text{ſin}\ \omega^4\ \text{coſ}\,\omega} + \tfrac{3}{2}\,l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\omega - \text{Conſt.}\right)$$

Il

Il faut que cette intégrale évanouiſſe au cas $x = 0$, ou tang $\omega = \sqrt{2}$, ce qui donne ſin $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$, coſ $\omega = \sqrt{\frac{1}{3}}$ & tang $\frac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ d'où l'on tire cette conſtante $= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Enſuite, pour l'étendre par toute la longueur des ailes, il faut mettre tang $\omega = \frac{3}{2}v + \sqrt{(\frac{9}{4}vv + 2)}$, d'où l'on aura

$$\text{ſec. } \omega = \sqrt{[3 + \tfrac{9}{2}vv + 3v\sqrt{(\tfrac{9}{4}vv + 2)}]} = \frac{1}{\text{coſ}\,\omega}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{[3 + \frac{9}{2}vv + 3v\sqrt{(\frac{9}{4}vv + 2)}]} - 1}{\frac{3}{2}v + \sqrt{(\frac{9}{4}vv + 2)}}$$

Or, ayant ces valeurs, le moment d'impulſion ſera

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{81vm}\left((1 + \tfrac{1}{2}\cot\omega^2 + \cot\omega^4)\,\text{ſec.}\,\omega + \tfrac{3}{2}\, l\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

où il faut remarquer que $\cot\omega = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{9}{4}vv + 2)} - \frac{3}{4}v$.

COROLL. I.

LXXVII. Au lieu de la conſtante $v$ il ſera plus commode d'introduire dans le calcul, l'angle même dont les ailes ſont inclinées au vent, à leur extrémité. Soit cet angle $= \theta$, & puisque tang $\theta = \frac{3}{2}v + \sqrt{(\frac{9}{4}vv + 2)}$ on aura tang $\theta^2 - 3v$ tang $\theta = 2$, donc $v = \frac{\text{tang}\,\theta^2 - 2}{3\,\text{tang}\,\theta} = \frac{1}{3}\text{tang}\,\theta - \frac{2}{3}\cot\theta$; & de là on connoitra la viteſſe des ailes à leur extrémité $\sqrt{v} = v\sqrt{c}$.

COROLL. 2.

LXXVIII. Introduiſant cet angle $\theta$ dans le calcul, le moment d'impulſion ſera,

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{27m(\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta)}\left((1 + \tfrac{1}{2}\cot\theta + \cot\theta^4)\,\text{ſec.}\,\theta + \tfrac{3}{2}\, l\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - \tfrac{3}{2}\, l\, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Or

Où $\theta$ étant l'inclinaison extrème, qui répond à la distance $x = f$, on suppose que pour une distance quelconque $x$ l'inclinaison est $= \omega$, en sorte qu'il soit

$$x = \frac{f(\text{tang }\omega - 2\cot\omega)}{\text{tang }\theta - 2\cot\theta} \quad \text{ou}$$

$$\text{tang }\omega = \frac{x(\text{tang }\theta - 2\cot\theta)}{f} + \sqrt{\left(\frac{xx(\text{tang }\theta - 2\cot\theta)^2}{ff} + 2\right)}$$

COROLL. 3.

LXXIX. Puisque l'angle $\theta$ est toujours plus grand que $54^\circ, 44'$, il sera bon de calculer pour les principaux angles, qui peuvent être pris pour $\theta$, les valeurs suivantes en nombres.

| $\theta$ | $\text{tang }\theta - 2\cot\theta$ | $(2 + \cot\theta^2 + 2\cot\theta^4)\text{ sec. }\theta$ | $l\text{ tang }\frac{1}{2}\theta$ |
|---|---|---|---|
| 54°,44′ | 0,000000 | 5, 196152 - - | —0,658479 |
| 60 | 0,577350 | 5, 111111 - - | —0,549306 |
| 65 | 1,211892 | 5, 470671 - - | —0.450875 |
| 70 | 2,019537 | 6, 337560 - - | —0,356378 |
| 75 | 3,196152 | 8, 044641 - - | —0,264842 |
| 80 | 5,318628 | 11, 707722 - - | —0,175426 |
| 81 | 5,996983 | 12, 953311 - - | —0,157730 |
| 82 | 6,834288 | 14, 518121 - - | —0,140082 |
| 83 | 7,898777 | 16, 538455 - - | —0,122478 |
| 84 | 9,304156 | 19, 241562 - - | —0,104912 |
| 85 | 11,255075 | 23, 036594 - - | —0,087377 |

COROLL. 4.

LXXX. Posons $(1 + \frac{1}{2}\cot\theta^2 + \cot\theta^4)\text{ sec. }\theta + \frac{3}{2}\,l\text{tang }\frac{1}{2}\theta = \Theta$ & soit $\Delta = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,l\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, qui est la valeur de $\Theta$, lorsqu'on

 met

met $\theta = 54°, 44'$; & conservant $\frac{\tang \theta - 2 \cot \theta}{3} = v$, le moment d'impulsion étant $= \frac{16 n f h c V c}{81 m} \cdot \frac{\Theta - \Delta}{v}$, nous aurons pour les mêmes angles :

| $\theta$ | $\Theta$ | $\Theta - \Delta$ | $v$ | $\frac{\Theta - \Delta}{v}$ |
|---|---|---|---|---|
| 54°,44′ | 1,610357 | 0,000000 | 0,000000 | 0,00000 |
| 60° | 1,731597 | 0,121240 | 0,192450 | 0,62998 |
| 65° | 2,059024 | 0,448667 | 0,403964 | 1,11065 |
| 70° | 2,634213 | 1,023856 | 0,673179 | 1,52090 |
| 75° | 3,625058 | 2,014701 | 1,065384 | 1,89105 |
| 80° | 5,590722 | 3,980365 | 1,772876 | 2,24510 |
| 81° | 6,240060 | 4,629703 | 1,998994 | 2,31600 |
| 82° | 7,048938 | 5,438581 | 2,278096 | 2,38735 |
| 83° | 8,085511 | 6,475154 | 2,632926 | 2,45935 |
| 84° | 9,463413 | 7,853056 | 3,101385 | 2,53212 |
| 85° | 11,387231 | 9,776874 | 3,751692 | 2,60595 |

### COROLL. 5.

LXXXI. Puisque le moment d'impulsion est proportionnel à la quantité $\frac{\Theta - \Delta}{v}$, on voit que ce moment croît en augmentant l'angle $\theta$, & s'il étoit possible de l'augmenter jusqu'à 90°, la valeur de $\frac{\Theta - \Delta}{v}$ deviendroit $= 3$, & le moment seroit $\frac{16 n f h c V c}{27 m}$. Or alors le nombre $v$ étant infini, la vitesse des ailes deviendroit infinie, ce qui rend ce cas impossible.

COROLL.

COROLL. 6.

LXXXII. Il eſt donc avantageux de prendre l'angle $\theta$ auſſi grand qu'il eſt poſſible ; or c'eſt le frottement qui y met des bornes, puisqu'il augmente auſſi en prenant l'angle $\theta$ plus grand, & qu'il deviendroit même infini, ſi l'on faiſoit cet angle droit. Si l'on veut que la viteſſe des ailes à leurs extrémités ſoit le double de la viteſſe du vent, il faut mettre l'angle $\theta = 81^\circ$, & alors l'effet ſera déjà aſſez conſidérable étant au plus grand poſſible comme 2,60595 à 3 ou comme 7 à 8.

SCHOLION. I.

LXXXIII. Or, ayant choiſi pour l'angle $\theta$ une valeur quelconque, il faut donner aux ailes la figure preſcrite, en ſorte qu'à chaque diſtance de l'axe l'inclinaiſon de l'élément de l'aile $MMmm$ à la direction du vent, ſoit préciſément celle que le calcul ordonne. Mais alors ces ailes duëment conſtruites ne produiſent le plus grand moment d'impulſion, qu'entant que leur mouvement eſt conforme à l'angle $\theta$, ou que la viteſſe de leurs extrémités eſt à celle du vent, comme le nombre $\nu$, qui répond à l'angle choiſi $\theta$, à l'unité. Si ces ailes tournoient ou plus vite ou plus lentement, le moment d'impulſion ſeroit toujours moindre : & c'eſt de là qu'on déterminera la diſpoſition de la machine, ou la quantité $r$, afin que les ailes puiſſent tourner avec cette viteſſe preſcrite.

SCHOLION. 2.

LXXXIV. Comparons cet effet, que ces ailes, dont l'inclinaiſon variable eſt la plus avantageuſe, produiſent, avec celui que les mêmes ailes produiroient, ſi leur inclinaiſon à la direction du vent étoit partout la même $= \omega$. Or nous avons trouvé ci-deſſus, que le plus grand moment d'impulſion de ces ailes eſt

$$\frac{0,459873\, nfhcVc}{m} \sin \omega^3$$

& que pour cet effet il faut qu'il ſoit $Vv = 0,537514 \tang \omega . Vc$ Ayant donc déterminé ci-deſſus pour ces ailes l'effet au cas de $\omega = 73^\circ$

 il

il faloit qu'il fut $Vv = 1,758\ Vc$. Il convient donc de comparer ce cas avec celui des ailes parfaites, qui demandent un mouvement également rapide : & partant nous aurons à peu près $\theta = 80°$. Or alors le moment d'impulsion produit par ces ailes parfaites est

$$2,24510\ \frac{16nfhcVc}{81m} = \frac{0,44344nfhcVc}{m}$$

& en posant $\omega = 73°$, le moment d'impulsion produit par des ailes semblables, mais par tout également inclinées, n'est que

$$\frac{0,40239nfhcVc}{m}$$

d'où l'on voit que donnant aux ailes leur juste figure pour la même rapidité du mouvement, on en obtient un moment d'impulsion plus grand. Donc, puisque dans l'expérience que Mr. *Lulofs* rapporte, les ailes avoient à peu près la figure parfaite, & partant cette machine auroit dû élever dans une minute, non $882n$, comme j'ai trouvé ci-dessus (54), mais $970n$ pieds cubiques d'eau, tandis qu'elle a élevé actuellement 1500 : d'où il semble qu'on n'auroit pas besoin de donner à $n$ une valeur double de l'unité. Cependant, si nous considérons 1°, que cette machine n'étoit pas dans la derniere perfection : 2°, que son mouvement n'avoit peut-être pas le juste rapport à celui du vent : 3°. que Mr. *Lulofs* a supposé la vitesse du vent trop grande & l'air trop dense, pour approcher le premier calcul de la vérité : 4°, qu'il dit expressément que ces machines élévent bien une égale quantité d'eau à la hauteur de $4\frac{1}{2}$ pieds : & 5°, qu'enfin je n'ai pas tenu compte du frottement : après ces considérations, dis-je, il n'y a point de doute, que posant $n = 1$, la quantité d'eau élevée par minute auroit dû être bien au dessous de 970 pieds cubiques, & partant que la valeur de $n$ doit être supposée considérablement plus grande que l'unité, ou que la force du vent est plus grande que selon l'hypothese commune. Il est donc evident, qu'il ne sera pas trop de poser $n = 2$ ; mais ce sera aussi assez. Car, quoique les expériences prouvent, que les boulets de canon éprouvent une résistance trois fois plus grande que selon l'hypo-

l'hypothese commune, il faut remarquer que la résistance d'un globe n'est que la moitié de celle du grand cercle ; & que la résistance d'une surface plane n'en seroit que doublée. D'où l'on peut conclure qu'on satisfera assez exactement aux expériences, si l'on suppose $n = 2$, & qu'on laisse $m = 800$. Remarquons ensuite que, posant, $\theta = 90°$ & $\omega = 90°$, le moment d'impulsion des ailes également inclinées est $0,45987 \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$ qui pour les ailes parfaites est $\frac{16}{27}. \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$ qui est à celui là comme 9 à 7.

## PROBLEME IX.

LXXXV. *Connoissant le frottement de la Machine, choisir entre les figures des ailes trouvées celle qui produise le plus grand effet pour une force donnée du vent.*

### SOLUTION.

Que F marque la force, qu'il faut appliquer à l'extrémité d'une aile pour vaincre le frottement : & puisque la vitesse à cet endroit est $= \sqrt{v} = \nu \sqrt{c}$, où $c$ est la hauteur duë à la vitesse du vent qu'on suppose donnée, le moment de l'effet du frottement est $F\nu\sqrt{c}$. Retranchons ce moment de celui d'impulsion trouvé ci-dessus, & nous aurons pour l'impulsion actuelle ce moment

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{81m}. \frac{\Theta - \Delta}{\nu} - F\nu\sqrt{c}$$

Il s'agit donc de trouver $\nu$ afin que cette formule

$$\frac{\Theta - \Delta}{\nu} - \frac{81mF}{16nfhc}\nu$$

devienne la plus grande : pour cet effet il faut qu'il soit

$$d. \frac{\Theta - \Delta}{\nu} = \frac{81mF}{16nfhc} d\nu$$

Or je ne m'arrêterai pas à développer cette équation différentielle, car

 après

après avoir donné les valeurs de $\frac{\Theta - \Delta}{v}$ pour les principaux angles $\theta$, on en peut trouver pour chaque angle $\theta$, le frottement F, auquel cet angle convient le mieux. Alors $d. \frac{\Theta - \Delta}{v}$ & $dv$ marqueront les accroiſſemens, que ces quantités prennent, en augmentant d'un degré l'angle $\theta$. Ainſi l'angle $\theta = 80°$ ſera le plus propre dans les cas où

$$0,07090 = \frac{81 mF}{16 nfhc} \quad 0,22611$$

c'eſt à dire lorsque

$$\frac{81 mF}{16 nfhc} = \tfrac{5}{16} \text{ ou } F = \tfrac{5}{81} \frac{nfhc}{m}$$

| De la même maniere le plus convenable angle $\theta$ | on trouvera lorsque le frottement eſt |
|---|---|
| $\theta = 80°$ | $F = 0,0617 . \frac{nfhc}{m}$ |
| $\theta = 81$ | $F = 0,0505 . \frac{nfhc}{m}$ |
| $\theta = 82$ | $F = 0,0400 . \frac{nfhc}{m}$ |
| $\theta = 83$ | $F = 0,0307 . \frac{nfhc}{m}$ |
| $\theta = 84$ | $F = 0,0224 . \frac{nfhc}{m}$ |

COROLL. I.

LXXXVI. De cette ſolution il eſt clair, que plus le frottement de la machine eſt petit, & plus ſera grand l'angle $\theta$, qu'on pourra employer. Ainſi, ſi le frottement étoit $F = 0,0617 \frac{hfhc}{m}$, on pourroir

roit employer l'angle $\theta = 80°$, & le moment d'impulsion actuel feroit $= 0,3342 \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$. Mais, fi le frottement étoit environ deux fois plus petit, ou $F = 0,0307 \frac{nfhc}{m}$, on pourroit faire ufage de l'angle $\theta = 83°$, & le moment d'impulfion actuel feroit $0,4050 \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$.

COROLL. 2.

LXXXVII. De là on voit, combien il y a à gagner en diminuant le frottement de la machine, puisque le moment d'impulfion en devient augmenté affez confidérablement. Dans le cas précédent, fi l'on pouvoit réduire le frottement à la moitié, on obtiendroit un effet presque d'un tiers plus grand.

COROLL. 3.

LXXXVIII. Je fuppofe ici que dans la difpofition de la machine on ait en vuë un certain dégré du vent, & il eft evident que le frottement demeurant le même, plus le vent qu'on a en vuë fera grand, & plus devient grand l'angle $\theta$, mais la machine une fois conftruite perdra fes avantages pour tous les autres vents, tant plus forts que plus foibles.

SCHOLIE. I.

LXXXIX. Appliquons cette détermination au cas que Mr. *Lulofs* a rapporté, & fuppofons que la machine dont il parle, ait été rangée fur l'angle $\theta = 80°$, & qu'elle ait procuré les plus grands avantages, lorsque le vent achevoit 30 pieds par feconde. Pofant donc $m = 800$ $n = 2$, $fh = 200$ pieds quarrés, & $c = 15$ pieds, le frottement y auroit été $F = 0,4628$ pieds cubiques d'eau, ou il auroit falu employer un poids de 30 ℔ à l'extrémité d'une

d'une aile pour vaincre le ſeul frottement. D'où le moment d'impulſion diminué du frottement n'auroit été que $0,3342 \frac{nfhcVc}{m}$ lequel, s'il n'y avoit point eu de frottement, auroit été $0,4435 \frac{nfhcV}{m}$ & partant d'un tiers plus grand. Or, ſi le frottement a été moindre, il faut que la machine ait été ajuſtée pour un vent plus foible : & ſi nous ſuppoſons qu'on eut en vuë un vent deux fois plus foible ou $c = \frac{15}{4}$ pieds, le frottement n'auroit été que le quart du précédent, ou de $7\frac{1}{2}$ ℔, qui ſembleroit mieux d'accord avec l'expérience. De là je conclus que la machine n'a été rien moins que parfaite, du moins pour le cas $c = 15$ pieds, & que ſi elle étoit parfaite, elle pourroit élever encore plus que 1500 pieds cubiques d'eau par minute : or alors, pour rendre le calcul d'accord avec l'expérience, il faudroit bien mettre $n = 2$, ce qui me confirme dans mon ſentiment rapporté ci-deſſus, qu'on ne ſauroit donner à $n$ une valeur moindre que deux.

### SCHOLIE. 2.

XC. Poſons le cas qu'on veuïlle conſtruire un moulin à vent, dont la longueur de chaque aile ſoit de 40 pieds ſur 5 pieds de largeur, afin qu'elle produiſe le plus grand effet, lorſque la viteſſe du vent eſt de 15 pieds par ſeconde, ou $c = \frac{15}{4}$ pieds, le frottement étant tant, que pour le vaincre, il faille appliquer au bout d'une des ailes une force de 5 ℔, ou qu'il ſoit $F = \frac{1}{12}$ pied cubique. Ayant donc $fh = 200$ & $\frac{n}{m} = \frac{1}{400}$, on aura $\frac{nfhc}{m} = \frac{15}{8}$, & partant $F = \frac{1}{12} = \frac{2}{45} \frac{nfhc}{m} = 0,0444 \frac{nfhc}{m}$ : il faudroit donc prendre l'angle $\theta$ de 82° à peu près, & conſtruire les ailes conſéquemment, de ſorte que leur inclinaiſon à la direction du vent fut de 54°, 44′ près l'axe & de 82° aux extrémités. Enſuite, lorſque le vent eſt de la force que je viens de ſuppoſer, la viteſſe des ailes doit être telle, que leurs extré-

mités

mités fassent $2\frac{1}{4}$. 15 pieds = 34 pieds par seconde, ou qu'elles achevent leurs révolutions en 7 secondes ; si le vent étoit ou plus fort ou plus foible, le mouvement des ailes devroit être augmenté ou diminué dans la même raison, de sorte que la vitesse des ailes à leur extrémité fût à celle du vent comme $2\frac{1}{4}$ à 1, afin que le moment d'impulsion devint le plus grand, & tel qu'il a été déterminé au §. 80. Mais alors, en retranchant le frottement, on n'auroit plus l'avantage du plus grand : & si le mouvement des ailes ne suivoit plus le rapport marqué, le moment d'impulsion ne seroit plus le plus grand, mais se trouveroit au dessous de la valeur indiquée au §. 80, ces valeurs n'étant justes que lorsque la lettre $v$ obtient la valeur correspondante. Mais il arrive ordinairemenn dans ces machines, qui sont destinées à élever un certain fardeau, ou à vaincre une cerraine résistance, qu'on n'est pas le maitre de la vitesse des ailes, vû qu'elle dépend de la disposition de la machine : & on doit se contenter, que pour un certain vent, la vitesse des ailes soit conforme à la régle. Pour tous les autres cas, la détermination du moment d'impulsion demande un calcul particulier, que je vais expliquer dans le problème qui suit.

## PROBLEME X.

XCI. *Les ailes étant construites en sorte, que lorsque leur vitesse a le rapport prescrit à celle du vent, elles produisent le plus grand moment d'impulsion ; trouver le moment d'impulsion, lorsque le mouvement des ailes est plus ou moins rapide à l'egard du vent.*

### SOLUTION.

Soit $\theta$ l'angle sous lequel l'extrémité des ailes est inclinée à la direction du vent, & les ailes étant construites selon la regle prescrite ci-dessus, seront propres à procurer le plus grand moment d'impulsion, lorsqu'elles tournent avec une vitesse, qui soit à celle du vent comme $v$ à 1 ou qu'il soit $V v = v V c$. Or nous avons vû que le rapport de ce nombre $v$ à l'angle $\theta$ est exprimé en sorte, $v = \frac{1}{3}$

tang $\theta$ — $\frac{2}{3}$ cot $\theta$. Enſuite, pour les endroits plus proches de l'axe, l'inclinaiſon eſt plus grande, en ſorte que poſant pour la diſtance OP $= x$ l'inclinaiſon $= \omega$ il ſoit $x = \frac{f(\text{tang}\,\omega - 2\,\cot\,\omega)}{3\nu}$, d'où l'on doit tirer la conſtruction des ailes ; & ces ailes produiroient le moment qui a été aſſigné ci-deſſus, s'il étoit $\sqrt{v} = \nu\sqrt{c}$. Mais ſuppoſons à préſent qu'il ſoit $\sqrt{v} = \mu\sqrt{c}$, & pour chercher le moment d'impulſion qui en réſulte, il faut recourir à la formule intégrale, laquelle ſera :

$$\frac{4\mu n h c \sqrt{c}}{mf} \int x\,dx\,\text{cof}\,\omega^3 \left(\text{tang}\,\omega - \frac{\mu x}{f}\right)^2$$

Or, puiſque $x = \frac{f(\text{tang}\,\omega - 2\,\cot\,\omega)}{3\nu} = \frac{f(\text{ſin}\,\omega^2 - 2\,\text{cof}\,\omega^2)}{3\nu\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega}$

nous aurons

$$x\,dx\,\text{cof}\,\omega^3 = \frac{ff\,d\omega\,(\text{ſin}\,\omega^4 - 4\,\text{cof}\,\omega^4)}{9\nu\nu\,\text{ſin}\,\omega^3} \quad \&$$

$$\text{tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f} = \text{tag}\,\omega - \frac{\mu}{3\nu}(\text{tag}\,\omega - 2\cot\,\omega) = \frac{(3\nu-\mu)\,\text{tag}\,\omega + 2\mu\cot\omega}{3\nu}$$

$$\text{ou tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f} = \frac{(3\nu-\mu)\,\text{ſin}\,\omega^2 + 2\mu\,\text{cof}\,\omega^2}{3\nu\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega} = \frac{2\mu - 3(\nu-\mu)\,\text{ſin}\,\omega^2}{3\nu\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega} =$$

$$\frac{2}{3\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega} + \frac{(\nu-\mu)(\text{ſin}\,\omega^2 - 2\,\text{cof}\,\omega^2)}{3\nu\,\text{ſin}\,\omega\,\text{cof}\,\omega}$$

delà on aura

$$\left(\text{tag}\,\omega - \frac{\mu x}{f}\right)^2 = \frac{4}{9\text{ſ}\,\omega^2\,\text{cſ}\,\omega^2} + \frac{4(\nu-\mu)(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)}{9\nu\,\text{ſin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega^2} + \frac{(\nu-\mu)^2(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)^2}{9\nu\nu\,\text{ſin}\,\omega^2\,\text{cof}\,\omega^2}$$

& partant le moment cherché ſera

$$\frac{16\mu n f h c\sqrt{c}}{81\,\nu\nu\,m} \int \frac{d\omega(\text{ſn}\,\omega^4 - \text{cſ}\,\omega^4)}{\text{ſin}\,\omega^5\,\text{cof}\,\omega^2} \left(1 + \frac{(\nu-\mu)(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)}{\nu} + \frac{(\nu-\mu)^2}{4\nu\nu}(\text{ſn}\,\omega^2 - 2\text{cſ}\,\omega^2)^2\right)$$

qui

qui ſe réduit à

$$\frac{16\mu n f h c \sqrt{c}}{81\,\nu^4\, m}\int d\omega\left\{\frac{(3\nu-\mu)^2 \sin\omega}{\cos\omega^2}+27(\nu-\mu)^2\sin\omega-\frac{4(9\nu\nu-30\mu\nu+20\mu\mu)}{\sin\omega}+\frac{16\mu(4\mu-3\nu)}{\sin\omega^3}-\frac{16\mu\mu}{\sin\omega^5}\right\}$$

Or, ayant trouvé l'intégrale de chaque partie ci-deſſus, ſi nous poſons après l'intégration $\omega = \theta$, & que nous y ajoutions une telle conſtante, que l'intégrale évanouiſſe en poſant $\sin\omega = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ & $\cos\omega = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ le moment d'impulſion réſultera :

$$\frac{4\mu n f h c\sqrt{c}}{81\,\nu^4\, m}\left\{\begin{array}{l}\frac{(3\nu-\mu)^2}{\cos\theta}+\frac{2\mu(12\nu-13\mu)}{\sin\theta^3}\cos\theta+\frac{4\mu\mu}{\sin\theta^4}\cos\theta-27(\nu-\mu)^2\cos\theta-6(6\nu\nu-16\mu\nu+9\mu\mu)\,l\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta \\ \qquad -6\mu(4\nu-3\mu)\sqrt{3}\quad +6(6\nu\nu-16\mu\nu+9\mu\mu)\,l\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$$

d'où, en poſant $\mu = \nu$, l'on obtient le moment d'impulſion trouvé ci-deſſus. Mais, pour que cette formule ſoit d'accord avec la vérité, il faut qu'il ſoit $\mathrm{tang}\,\omega > \frac{\mu x}{f}$ ou $\mathrm{tang}\,\omega > \frac{\mu\,(\mathrm{tang}\,\omega - 2\cot\omega)}{3\nu}$

donc $\mu < \frac{3\nu\,\mathrm{tang}\,\omega}{\mathrm{tang}\,\omega - 2\cot\omega}$ par conſéquent $\mu < \frac{3\nu\,\mathrm{tang}\,\theta}{\mathrm{tang}\,\theta - 2\cot\theta}$

Or $\nu = \frac{\mathrm{tang}\,\theta - 2\cot\theta}{3}$, donc $\mu < \mathrm{tang}\,\theta$.

Si l'angle $\theta$ approche fort d'un droit, à cauſe de la petiteſſe de l'angle $\theta$, le moment d'impulſion ſera fort à peu près.

$$\frac{4\mu(3\nu-\mu)^2}{81\,\nu^4\cos\theta}\cdot\frac{n f h c\sqrt{c}}{m} = \frac{16\nu^3 - 4\lambda\lambda(3\nu-\lambda)}{81\,\nu^3\cos\theta}\cdot\frac{n f h c\sqrt{c}}{m}$$

en poſant $\mu = \nu + \lambda$ ; d'où l'on voit que, ſoit qu'on prenne pour $\lambda$ un nombre poſitif ou négatif, le moment d'impulſion eſt toujours moindre, que s'il étoit $\lambda = 0$ ou $\mu = \nu$.

COROLL. I.

XCII. Si les ailes tournent deux fois plus vite par rapport au vent, qu'elles devroient tourner pour produire la plus forte impulſion,



on

on aura $\mu = 2\,\nu$, & le moment d'impulſion ſera $= \frac{8\,nfhc\,\sqrt{c}}{81\,\nu m \operatorname{coſ}\theta}$; qui ſeroit deux fois plus grand, ſi les ailes avoient leur juſte viteſſe.

COROLL. 2.

XCIII. Suppoſons que la viteſſe des ailes ne ſoit que la moitié de la plus avantageuſe, ou que $\mu = \frac{1}{2}\,\nu$; & alors le moment d'impulſion ſera au plus grand comme 25 ad 32 : on perdra donc à peu près le quart ſur l'effet.

COROLL 3.

XCIV. Mais il faut bien remarquer que cette formule ſimple n'a lieu, que lorſque l'angle $\theta$ approche fort d'un droit & que le nombre $\nu$ ſurpaſſe le binaire. Alors il y aura à peu près tang $\theta = 3\,\nu$ & $\theta = 3\,\nu = \frac{1}{\operatorname{coſ}\theta}$: d'où notre formule pour le moment d'impulſion ſera $= \frac{4\,\mu\,(3\,\nu - \mu)^2}{27\,\nu^3} \cdot \frac{nfhc\sqrt{c}}{m}$.

COROLL 4.

XCV. Soit le poids à élever $=$ P, & ſa viteſſe à celle de l'extrémité des ailes comme $\nu$ à $f$, de ſorte que le moment de l'effet ſoit $=$ P. $\frac{\mu r \sqrt{c}}{f}$. Négligeant donc le frottement, on aura

$$\mathrm{P}\,r = \frac{4\,(3\,\nu - \mu)^2}{27\,\nu^3} \cdot \frac{nffhc}{m}\text{, \& partant } (3\,\nu - \mu)^2 = \frac{27\,\nu^3\,m\mathrm{P}r}{4\,nffhc}.$$

Donc $3\,\nu - \mu = \frac{3\,\nu\sqrt{3\,\nu m\,\mathrm{P}r}}{2f\sqrt{nhc}}$ & $\mu = 3\,\nu\left(1 - \frac{\sqrt{3\,\nu m\,\mathrm{P}r}}{2f\sqrt{nhc}}\right)$, d'où l'on connoitra la viteſſe des ailes pour chaque viteſſe du vent $\sqrt{c}$:

$$\sqrt{v} = 3\,\nu\left(\sqrt{c} - \frac{\sqrt{3\,\nu m\,\mathrm{P}r}}{2f\sqrt{nh}}\right).$$

COROLL.

COROLL. 5.

XCVI. Donc, pour que le vent ſoit aſſez fort pour mettre la machine en mouvement, il faut que ſa viteſſe $\sqrt{c}$ ſoit plus grande que $\frac{\sqrt{3vmPr}}{2f\sqrt{nh}}$. Et alors le moment d'impulſion ſera :

$$\frac{3vPr\sqrt{c}}{f}\left(1-\frac{\sqrt{3vmPr}}{2f\sqrt{nhc}}\right)=\frac{3vPr}{f}\left(\sqrt{c}-\frac{\sqrt{3vmPr}}{2f\sqrt{nh}}\right).$$

Donc, ſi la viteſſe du vent devient double, l'effet ſera plus que deux fois plus grand.

SCHOLIE.

XCVII. Après ces recherches on ne trouvera plus de doutes dans la comparaiſon de la théorie avec les expériences, que Mr. *Lulofs* a faites ſur l'effet des moulins à vent en Hollande. Car d'abord, en mettant $v = 2$, l'effet que la théorie montre ſurpaſſera aſſez celui qu'on obſerve, pour avoir dequoi tenir compte, tant du frottement, que de l'imperfection de la Machine. Enſuite, pour ce que Mr. *Lulofs* rapporte, que l'effet n'étoit pas proportionnel au cube de la viteſſe du vent, & qu'il ſuivoit même quelquefois une raiſon inférieure à celle du quarré, tant s'en faut, que cela ſoit contraire à la théorie, qu'il eſt plutôt admirablement d'accord. Car ce ne ſont que les plus grands effets, qui ſont proportionnels aux cubes de la viteſſe du vent ; & pour produire ces plus grands effets, il faut donner aux machines pour chaque viteſſe du vent une diſpoſition particuliere, en ſorte que la viteſſe du fardeau tienne toujours un certain rapport à celle du vent. Mais, puisqu' ordinairement on ne change rien dans la diſpoſition de la machine, quoique le vent varie, nous venons de voir que dans ce cas la raiſon des cubes n'a point lieu, & que l'effet de la machine ne croît que dans une raiſon plus grande que celle des viteſſes du vent, la raiſon véritable étant comme la viteſſe même diminuée d'une quantité conſtante, qui dépend de la diſpoſition de la machine. Donc, puisque la théorie, ſur le pied, que je viens

de l'établir satisfait à ces deux principaux phénomenes observés par Mr. *Lulofs*, il n'y a aucun doute, qu'elle ne soit parfaitement d'accord avec toutes les expériences possibles, & que, fondé sur cette théorie, on ne puisse porter la pratique à un plus haut degré de perfection. Pour cet effet j'ai déjà déterminé la figure la plus avantageuse, qu'il faut donner aux ailes, & la disposition de la machine la plus convenable. Mais il semble qu'on y puisse apporter encore de plus grandes perfections en augmentant la surface des ailes ; on leur donne communément la même largeur par toute la longueur, & quand on ne les fait pas plus larges vers les extrémités, la raison en paroit être qu'on doit craindre, que la force du vent n'en rompe leur liaison avec l'axe. Mais, pour prévenir cet accident, ne pourroit-on pas diminuer la longueur pour gagner d'autant plus sur la largeur ? Ou au lieu de quatre ne pourroit-on pas y mettre 6 ou 8 ? Il n'y a aucun doute, qu'on n'ait fait déjà des essais là dessus, & il est difficile de deviner les difficultés, qu'on y a rencontrées. Quoiqu'il en soit, une figure divergente semble être très propre pour les ailes d'un moulin à vent : & quand on auroit peur, qu'une trop grande largeur vers les extrémités nuisit à la fermeté, on pourroit multiplier le nombre des ailes en sorte, qu'elles occupassent presque un espace circulaire, dont leur longueur seroit le rayon. Au moins il vaudra la peine d'examiner les avantages, que la théorie promet d'une telle construction des ailes, sans se mettre en peine sur les difficultés, que la pratique pourroit opposer à leur exécution.

## PROBLEME XI.

XCVIII. *Les ailes étant divergentes depuis l'axe vers l'extrémité selon des lignes droites, & ayant à chaque distance de l'axe l'inclinaison à la direction du vent, qui a été déterminée ci-dessus, trouver le moment d'impulsion que ces ailes fourniront, la disposition de la machine étant la plus avantageuse.*

SOLUTION.

Soit la largeur de chaque aile à l'extrémité HH $= h$, qui convient à la distance de l'axe OF $= f$: & à une distance quelconque OP $= x$, la largeur sera MM $= y = \frac{hx}{f}$. Soit $Vv$ la vitesse des ailes à leur extrémité, & $Vc$ celle du vent; & que l'elément MM soit incliné à la direction du vent sous l'angle $= \omega$. Cela posé, nous avons vû, que pour rendre la force du vent la plus grande, il faut en posant $\frac{Vv}{Vc} = \nu$, qu'il soit $\tang \omega = \frac{3\nu x}{2f} + V\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)$. Fig. 4.

Ensuite, lorsque le moulin est garni de 4 telles ailes, à cause de $y = \frac{hx}{f}$, le moment d'impulsion sera :

$$\frac{4\nu nhcVc}{mff} \int xxdx \cos\omega^3 \left(\tang\omega - \frac{\nu x}{f}\right)^2$$

Or, puisque $\tang \omega = \frac{3\nu x}{2f} + V\left(\frac{9\nu\nu xx}{4ff} + 2\right)$ nous aurons

$$x = \frac{f}{3\nu}(\tang\omega - 2\cot\omega) = \frac{f(\sin\omega^2 - 2\cos\omega^2)}{3\nu\sin\omega\cos\omega} \quad \&$$

$$dx = \frac{fd\omega\,(\sin\omega^2 + 2\cos\omega^2)}{3\nu\sin\omega^2\cos\omega^2};$$

D'où nous tirons :

$$\tang\omega - \frac{\nu x}{f} = \frac{2}{3\sin\omega\cos\omega} \quad \&$$

$$x\,dx\cos\omega^3 = \frac{ffd\omega(\sin\omega^4 - 4\cos\omega^4)}{9\nu\nu\sin\omega^3} \quad \text{donc}$$

$$xxdx\cos\omega^3 = \frac{f^3d\omega(\sin\omega^6 - 2\sin\omega^4\cos\omega^2 - 4\sin\omega^2\cos\omega^4 + 8\cos\omega^6)}{27\nu^3\sin\omega^4\cos\omega}$$

&

& partant le moment d'impulsion cherché sera :

$$\frac{4\nu n h c \sqrt{c}}{m f f} \cdot \frac{4 f^3}{243\, \nu^3} \int \frac{d\omega(\sin\omega^6 - 2\sin\omega^4 \cos\omega^2 - 4\sin\omega^2 \cos\omega^4 + \cos\omega^6)}{\sin\omega^6 \cos\omega^3}$$

ou

$$\frac{16\, n f h c \sqrt{c}}{243\, \nu\nu m} \int d\omega \left( \frac{1}{\cos\omega^3} - \frac{2}{\sin\omega^2 \cos\omega} - \frac{4\cos\omega}{\sin\omega^4} + \frac{8\cos\omega^3}{\sin\omega^6} \right).$$

Pour intégrer cette formule, il faut remarquer les réductions suivantes,

$$\int \frac{d\omega}{\cos\omega} = l\, \mathrm{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\int \frac{d\omega}{\cos\omega^3} = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega^2} + \tfrac{1}{2}\, l\, \mathrm{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega^2 \cos\omega} = l\, \mathrm{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega) - \frac{1}{\sin\omega}$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega}{\sin\omega^4} = - \frac{1}{3\sin\omega^3}$$

$$\int \frac{d\omega \cos\omega^3}{\sin\omega^6} = - \frac{1}{5\sin\omega^5} + \frac{1}{3\sin\omega^3}$$

& alors l'intégrale se trouvera

$$\frac{16\, n f h c \sqrt{c}}{243\, \nu\nu m} \left\{ \begin{matrix} \frac{\sin\omega}{2\cos\omega^2} + \frac{2}{\sin\omega} + \frac{4}{\sin\omega^3} - \frac{8}{5\sin\omega^5} - \tfrac{3}{2}\, l\, \mathrm{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega) \\ - \frac{27\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \qquad\qquad + \tfrac{3}{2}\, l \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1} \end{matrix} \right\}$$

après y avoir ajouté la juste constante, pour que l'intégrale évanouïsse, quand $x = 0$, ou $\mathrm{tang}\, \omega = \sqrt{2}$. Maintenant il ne reste qu'à poser $x = f$ ou $\mathrm{tang}\, \omega = \tfrac{3}{2}\nu + \sqrt{(\tfrac{9}{4}\nu\nu + 2)}$ pour avoir l'entier moment d'impulsion. Donc, si $\theta$ marque l'angle, que fait la direction

tion du vent avec l'extrémité des ailes, de forte que $v = \frac{\text{tang}\,\theta - 2\cot\theta}{3}$, le moment d'impulsion sera :

$$\frac{16nfhc\sqrt{c}}{243vm}\left(\frac{\text{tang}\,\theta^2}{2\sin\theta}+\frac{2}{\sin\theta}+\frac{4}{\sin\theta^3}-\frac{8}{5\sin\theta^5}-\frac{27\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}-\tfrac{3}{4}l\,\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)+\tfrac{3}{8}l\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}\right)$$

COROLL. I.

XCIX. Si l'angle $\theta$, sous lequel l'extrémité des ailes est inclinée à la direction du vent, est fort proche de $90^\circ$, de forte que tang $\theta$ est un nombre fort grand, par rapport auquel on puisse négliger les autres termes, on aura à peu près $v = \frac{1}{3}$ tang $\theta$, & sin $\theta = 1$; d'où le moment d'impulsion sera $= \frac{8\,nfhc\sqrt{c}}{27\,m}$.

COROLL. 2.

C. Si les ailes avoient par toute leur longueur la même largeur $h$, de sorte que leur surface seroit deux fois plus grande, nous avons vû ci-dessus, que le moment d'impulsion seroit $= \frac{16nfhc\sqrt{c}}{27m}$, & par conséquent deux fois plus grand que dans le cas présent.

COROLL. 3.

CI. De là on comprend, que le moment d'impulsion dépend de la surface des ailes, & que leur figure n'y change pas considérablement l'effet. Car nous venons de voir que, soit qu'on donne aux ailes une figure rectangulaire ou triangulaire, pourvu que leur surface soit la même, le moment d'impulsion ne varie point.

COROLL. 4.

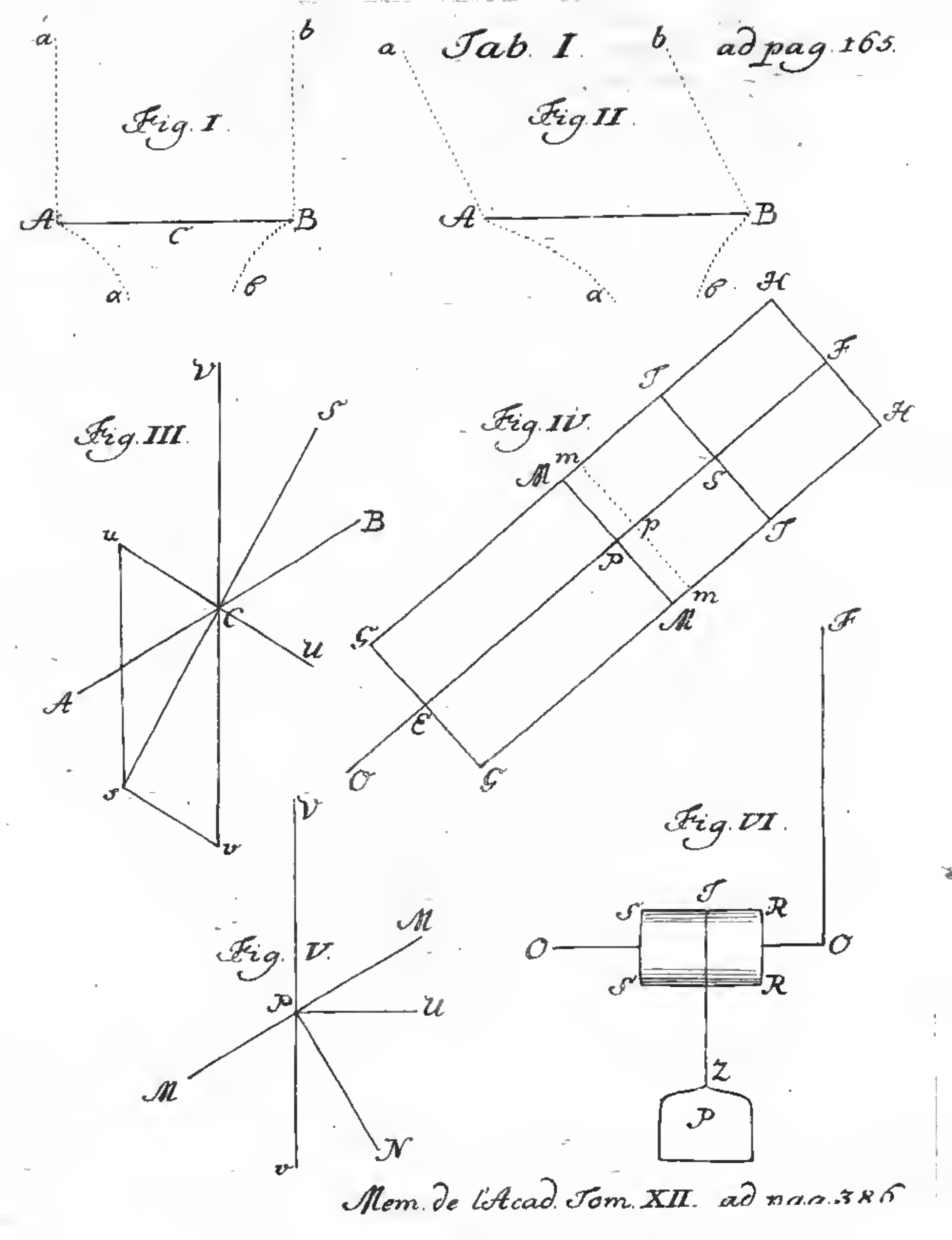
CII. On ne sauroit donc produire un plus grand moment d'impulsion, qu'en étendant les ailes jusqu'à remplir l'espace circulaire dont

dont le rayon eſt $= f$, ce qui arrivera, lorsqu'on prend $4h = 6f$ ou $h = \frac{3}{2} f$ à peu près. Alors le moment d'impulſion ſera $= \frac{4nffc\sqrt{c}}{9m}$.

SCHOLIE.

CIII. Par là on comprend la raiſon de la pratique ordinaire, où l'on donne aux ailes la même largeur par toute leur longueur : puisqu'on y perdroit, ſi l'on diminuoit la largeur vers l'axe. Car, ſuppoſé qu'on donne aux ailes à leur extrémité la plus grande largeur que les circonſtances permettent, il vaut toujours mieux de conſerver la même largeur vers l'axe, que de la diminuer, & cela auſſi bien qu'il eſt poſſible. Cependant, ſi l'on pouvoit multiplier les ailes, en ſorte que leurs extrémités s'atteigniſſent à peu près, ce ſeroit ſans doute la conſtruction la plus avantageuſe, puisqu'on obtiendroit par ce moyen la plus grande ſurface poſſible pour la même longueur des ailes. Car, puisque le moment d'impulſion eſt proportionnel à la ſurface des ailes, le plus ſûr moyen de l'augmenter eſt de rendre cette ſurface auſſi grande qu'il eſt poſſible ; mais il eſt bien à remarquer, que je ſuppoſe ici l'angle $\theta$ fort proche d'un droit ; & parce qu'on a alors $\nu = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\theta$, la viteſſe des ailes à leur extrémité doit ſurpaſſer celle du vent. Or, ayant fixé une certaine ſurface, qu'on veut donner aux ailes, il importe peu pour le moment d'impulſion, qu'elle figure on voudra choiſir : mais pour la fermeté de la machine il n'en eſt pas de même, & moins on s'écarte de l'axe, moins elle ſouffrira : d'où la diſpoſition des ailes ſeroit la plus avantageuſe, ſi l'on rempliſſoit de la ſurface donnée un eſpace circulaire autour de l'axe. Mais il faut auſſi remarquer qu'alors le mouvement de rotation des ailes, & partant auſſi de l'axe, deviendroit plus rapide. On fera donc bien de joindre toutes ces conſidérations enſemble, & alors il ne ſera plus difficile de porter la conſtruction des moulins à vent au plus haut degré de perfection, dont ils ſont ſuſceptibles.

EXPE'-



Mem. de l'Acad. Tom. XII. ad pag. 386